Mathematics

NOV 2

Journal für die reine und angewandte Mathematik

gegründet von A. L. Crelle 1826

Herausgegeben von

K. Hensel

H. Hasse L. Schlesinger

Wissenschaftlicher Beirat

H. Brandt / M. Dehn / G. Doetsch / A. Fraenkel / O. Haupt / F. Hausdorff
E. Hellinger / G. Kowalewski / H. Rademacher / K. Reidemeister
A. Rosenthal / C. Schaefer / W. Schmeidler / F. Schottky / O. Toeplitz

Band 168

Heft 3

Ausgegeben den 30. September 1932

Walter de Gruyter & Co.

vormals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlagsbuchhandlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

Berlin W 10 und Leipzig

1932

Band 168. Heft 3.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Haupt, Otto, Über die Erweiterung stetiger Abbildungen	129
Jung, Heinrich W. E., Algebraische Funktionen von zwei Veränderlichen. C. . .	131
Lorenz, Paul, Über gewisse Funktionen, die in der mathematischen Konjunkturforschung eine große Rolle spielen	170
Wegner, Udo, Zur Theorie der auflösbaren Gleichungen von Primzahlgrad. I . .	176
Haußner, Robert, Über die Verteilung von Lücken- und Primzahlen	192

An unsere Mitarbeiter!

Es ist unbedingt notwendig, daß alle zur Einsendung gelangenden Manuskripte sowohl vollkommen druckfertig, als auch in gut lesbarer, möglichst Maschinen-Schrift gehalten sind, wobei die gotischen und griechischen wie überhaupt alle besonderen Typen durch Buntstift bezeichnet werden. Nachträgliche Korrekturen verursachen wesentliche Kosten, die sich naturgemäß auf die Preisgestaltung des Journals mit auswirken müssen. Machen sich also aus irgend einem Grunde Text-Änderungen eines Beitrages notwendig, so sind diese der Schriftleitung sofort mitzuteilen, wenn sie die endgültige Annahme und Weitergabe an den Verlag meldet; Korrekturen nach dem Vorliegen des Satzes dürfen sich ausschließlich auf die Verbesserung von Satzfehlern erstrecken.

Manuskripte, die den eingangs erwähnten Vorschriften entsprechen, ermöglichen auch der Schriftleitung eine raschere Prüfung als schwer leserliche und können infolgedessen schneller zum Druck gelangen.

Im Interesse des schnellen Erscheinens der einzelnen Hefte erhalten die Herren Verfasser grundsätzlich nur eine Korrektur ihrer Beiträge. Da seitens der Schriftleitung die Korrekturen in typographischer Hinsicht sorgfältige Lesung finden und die richtige Ausführung der Autor-Korrekturen genau überwacht wird, hoffen wir, auch so allen Wünschen gerecht zu werden.

Die Herren Verfasser erhalten von Abhandlungen bis zu 24 Seiten Umfang 100 Sonderabdrucke, von größeren Arbeiten 50 Sonderabdrucke kostenfrei, weitere gegen Berechnung.

Sendungen für das Journal erbittet die Redaktion ausschließlich unter der Adresse:

An die Redaktion des Journals für die reine und angewandte Mathematik

Professor Dr. Kurt Hensel, Marburg-Lahn, Behringweg 7.

Über die Erweiterung stetiger Abbildungen.

Von *Otto Haupt* in Erlangen.

1. Bekanntlich gilt folgender Satz [1]): Es sei $\mathfrak{D}^*$ ein metrischer Raum, ferner $\mathfrak{D}$ eine in $\mathfrak{D}^*$ abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{D}^*$, schließlich sei auf $\mathfrak{D}$ (als Definitionsbereich) eine eindeutige, reelle Funktion $f(P)$ definiert. Dann existiert eine Funktion $f^*(P)$ mit $\mathfrak{D}^*$ als Definitionsbereich, welche auf $\mathfrak{D}$ mit $f(P)$ übereinstimmt und überdies stetig ist in allen Punkten des Komplementes $\mathfrak{D}^* - \mathfrak{D}$ von $\mathfrak{D}$, sowie in allen denjenigen Punkten von $\mathfrak{D}$, in denen $f(P)$ auf $\mathfrak{D}$ stetig ist. Überdies kann $f^*(P)$ so gewählt werden, daß $0 \leqq f^*(P) \leqq a$, falls $0 \leqq f(P) \leqq a$ gilt [2]). Insbesondere läßt sich also jede auf $\mathfrak{D}$ stetige Funktion zu einer auf $\mathfrak{D}^*$ stetigen Funktion erweitern.

Es liegt die Frage nahe, inwieweit der angegebene Satz auch gilt für allgemeinere eindeutige Abbildungen $A(P)$, d. h. für Abbildungen von $\mathfrak{D}$ bzw. $\mathfrak{D}^*$ auf Mengen $\mathfrak{W}$ bzw. $\mathfrak{W}^*$ eines metrischen Raumes, welcher nicht gerade der Bereich der reellen Zahlen zu sein braucht, wie im Falle einer Funktion. Da diese Frage, soweit bekannt, in der Literatur bisher nicht gestreift ist, sei folgender Hinweis gestattet.

2. Der obige Satz überträgt sich zunächst ohne weiteres auf eindeutige Abbildungen $A(P)$, bei welchen der „Wertevorrat“ $\mathfrak{W}$ Teilmenge des „abzählbar-dimensionalen Grundquaders Q_ω“ ist; dabei wird die Gesamtheit der Punkte von Q_ω erklärt [3]), als die Gesamtheit aller geordneten Folgen $x_1, x_2, \ldots$ in inf. von abzählbar unendlich vielen reellen Zahlen („Komponenten“), welche überdies der Bedingung $0 \leqq x_\nu \leqq \frac{1}{\nu}$ genügen ($\nu = 1, 2, \ldots$). In der Tat: $A(P)$ ist äquivalent mit der geordneten Folge der Komponentenfunktionen $x_\nu = f_\nu(P)$ ($\nu = 1, 2, \ldots$). Wir erweitern nun (dem in Nr. 1 angegebenen Satze entsprechend) jedes $f_\nu(P)$ zu einer auf $\mathfrak{D}^*$ definierten Funktion $f_\nu^*(P)$ und zwar so, daß $0 \leqq f_\nu^*(P) \leqq \frac{1}{\nu}$. Durch die geordnete Folge $f_1^*(P), f_2^*(P), \ldots$ ist alsdann eine Abbildung $A^*(P)$ von $\mathfrak{D}^*$ auf eine, $\mathfrak{W}$ umfassende, Teilmenge $\mathfrak{W}^*$ von Q_ω definiert. Und es ist nur noch zu zeigen, daß $A(P)$ bzw. $A^*(P)$ in allen und lediglich denjenigen Punkten stetig ist, in welchen sämtliche $f_\nu(P)$ bzw. sämtlich $f_\nu^*(P)$ stetig sind. Dies ergibt sich am einfachsten unter Benutzung des Abstandes $|X, X_0|$ zweier Punkte X, X_0 von Q_ω mit den Komponenten x_ν bzw. $x_{0\nu}$ gemäß der Festsetzung: $|X, X_0| = \sqrt{\sum_{\nu=1}^{\infty} (x_\nu - x_{0\nu})^2}$. Die Stetigkeit von $A(P)$ an der Stelle P_0 ist dann gleichbedeutend damit, daß $|A(P), A(P_0)|^2 = \sum_{\nu=1}^{\infty} (f_\nu(P) - f_\nu(P_0))^2 < \varepsilon$, falls $|P, P_0| < \delta\,(\varepsilon, P_0)$

[1]) Vgl. Hahn, H., Reelle Funktionen, 1. Bd. (Berlin 1920), S. 137, Satz VIII, und S. 140, Satz X.

[2]) Hahn, a. a. O. [1]), S. 138 oben.

[3]) Menger, K., Dimensionstheorie, Leipzig und Berlin 1928, S. 14.

(dabei bedeutet $|P, P_0|$ den Abstand von P und P_0 in $\mathfrak{D}$ bzw. $\mathfrak{D}^*$). Die $f_\nu(P)$ müssen daher in P_0 stetig sein, wenn $A(P)$ dort stetig ist. Sind umgekehrt die $f_\nu(P)$ sämtlich stetig in P_0, so ist auch $A(P)$ stetig in P_0 wegen $(f_\nu(P) - f_\nu(P_0))^2 \leqq \frac{4}{\nu^2}$ bzw. wegen der hieraus folgenden, in P gleichmäßigen, Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} (f_\nu(P) - f_\nu(P_0))^2$.

Bemerkt man schließlich, daß jeder separable [4]) Raum mit einer Teilmenge des Q_ω homöomorph [5]) und daß die Stetigkeit von $A(P)$ invariant ist gegenüber homöomorpher Abbildung von $\mathfrak{W}$, so ergibt sich der

Satz: *Es sei $\mathfrak{D}$ eine im metrischen Raum $\mathfrak{D}^*$ abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{D}^*$, und es bezeichne $A(P)$ eine eindeutige Abbildung von $\mathfrak{D}$ auf einen separablen Raum $\mathfrak{W}$. Dann gibt es einen, $\mathfrak{W}$ umfassenden, separablen Raum $\mathfrak{W}^*$ derart, daß $A(P)$ sich erweitern läßt zu einer eindeutigen Abbildung $A^*(P)$ von $\mathfrak{D}^*$ auf $\mathfrak{W}^*$ mit folgender Eigenschaft: $A^*(P)$ stimmt in $\mathfrak{D}$ mit $A(P)$ überein, ferner ist $A^*(P)$ stetig auf $\mathfrak{D}^*$ in allen Punkten von $\mathfrak{D}^* - \mathfrak{D}$, sowie in allen Punkten von $\mathfrak{D}$, in denen $A(P)$ stetig ist auf $\mathfrak{D}$. War $A(P)$ stetig auf $\mathfrak{D}$, so ist also $A^*(P)$ stetig auf $\mathfrak{D}^*$.*

[4]) Menger, a. a. O. [3]), S. 24 und 72.
[5]) Menger, a. a. O. [3]), S. 57.

Eingegangen 22. Juli 1931.

Algebraische Funktionen von zwei Veränderlichen.

C. Über die Defekte von Klassen.

Von *Heinrich W. E. Jung* in Halle a. d. Saale.

Literaturverzeichnis.

1. G. Castelnuovo, Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica. Ann. di Mat. (2) **25** (1897), S. 235—318.

2. F. Severi, Sulla deficienza della serie caratteristica di un sistema lineare di curve appartenente ad una superficie algebrica. Atti della Reale Accademia dei Lincei (5) **12** (1903, 2. Hälfte), S. 250—259.

3. F. Severi, Sul teorema di Riemann-Roch e sulle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica. Atti della Reale Accademia delle Scienze di Torino **40** (1904—1905), S. 766—776.

4. H. W. E. Jung, Algebraische Flächen. Hannover 1925.

5. Enz. d. math. Wiss. III C, 6 b.

Einleitung.

Von den in dieser Arbeit bewiesenen Sätzen seien folgende hervorgehoben.

1. Es sei $(\mathfrak{Q})$ eine Klasse des Körpers K. Es seien, wie früher $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ die Nenner von x und y. Dann gibt es ganze Zahlen α_0, β_0, so daß

$$\omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\alpha}) = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \geqq \alpha_0, \qquad \omega_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{M}^{\beta}) = 0 \quad \text{für} \quad \beta \geqq \beta_0.$$

2. Allgemeiner gilt [1]): Es sei $\mathfrak{P}$ ein Primteiler oder auch ein ganzer Divisor ohne mehrfache Faktoren. Es sei aber $\mathfrak{P}$ kein Punktprimteiler oder enthalte keinen solchen als Faktor. Die Dimension der Klasse $(\mathfrak{P})$ sei mindestens 2. Ist dann 2σ die Ordnung des Divisors der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{P}$, so gibt es eine ganze Zahl λ_0, so daß

$$\omega_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{\lambda}) = \sigma \quad \text{für} \quad \lambda \geqq \lambda_0.$$

3. Es sei $(\mathfrak{K})$ die kanonische Klasse. Wir nennen dann die Klassen $(\mathfrak{K}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta})$ adjungierte Klassen. Es kann sein, daß diese Klassen alle imprimitiv sind, daß also die ganzen Divisoren dieser Klassen einen gemeinsamen Faktor $\mathfrak{V}_0$ haben. Wir setzen

$$\mathfrak{K}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta} \sim \mathfrak{V}_0\mathfrak{H}.$$

Es seien α und β so groß gewählt, daß die Klasse $(\mathfrak{K}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta})$ genau den Faktor $\mathfrak{V}_0$ hat. Dann können wir $\mathfrak{H}$ als Primteiler annehmen.

Werden die unabhängigen Veränderlichen x und y passend gewählt, so gilt folgendes: Der Divisor $\mathfrak{V}_0$ enthält alle und nur diejenigen Punktprimteiler, die gleichzeitig ausgezeichnete Primteiler erster Art sind. Ist $\mathfrak{V}_k$ ein derartiger Primteiler, so ist $(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{H}) = 0$ oder, was dasselbe ist, $(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}_0) = (\mathfrak{V}_k, \mathfrak{K})$. Durch diese Gleichungen ist eindeutig für jeden dieser Primteiler $\mathfrak{V}_k$ bestimmt, in welcher Potenz er in $\mathfrak{V}_0$ enthalten ist. Außerdem ist noch $[\mathfrak{K}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta}] = [\mathfrak{V}_0\mathfrak{H}] = [\mathfrak{H}]$, wo $[\mathfrak{T}]$ das A, I, Nr. 11 (dieses Journ. Bd. 165) definierte Symbol ist.

Es ist mir sehr wahrscheinlich, daß dies alles auch bei beliebiger Wahl von x, y gilt, aber ich kann es nicht beweisen.

4. F. Severi [2]) hat bewiesen: Hat eine algebraische Fläche nur einfache Singulari-

[1]) Kap. I. (Die Nummern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Anfang der Arbeit.

[2]) Seite 254, Satz a.

täten, und ist die Klasse $(\mathfrak{C})$ eine genügend hohe Potenz der Klasse der ebenen Schnitte, so ist $\omega_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{R}) = 0$. Hier wird bewiesen, daß

$$\omega_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{R}) = 0,$$

wo $\mathfrak{H}$ ein Primteiler der unter 3. definierten Klasse $(\mathfrak{H}) = (\mathfrak{R}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta}\mathfrak{B}_0^{-1})$ ist.

Diese Sätze dienen zur Definition des arithmetischen Geschlechtes p_a, zum Beweise des Riemann-Rochschen Satzes[3]) und, in Verbindung mit weiteren Sätzen, zur Herleitung des Satzes, daß die Zahl der linear unabhängigen totalen Differentiale erster Gattung gleich der Differenz des geometrischen und des arithmetischen Geschlechtes ist.

I. Defekte von Klassen der Form $(\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta})$.

1. *Idealnormen.*

Es sei $\mathfrak{Q}$ ein Primteiler vom Grade f und es sei seine Idealnorm

$$IN(\mathfrak{Q}) = Q'(x, y). \tag{1}$$

Wir fassen den Körper K als Körper der einen Veränderlichen x auf mit dem Parameter y, wir betrachten also den Körper $K(y)$ mit der zugehörigen über der x-Ebene ausgebreiteten Riemannschen Fläche $R(y)$. Der Grad von Q in x sei λ. Wenn b ein endlicher Wert von y ist und wenn sich für $y = b$ der Grad von Q nicht erniedrigt und wenn $Q(x, b)$ keine mehrfachen Nullstellen hat, so wollen wir b einen für $\mathfrak{Q}$ regulären Wert von y nennen.

Es sei b solch ein regulärer Wert und es seien $a_1, a_2, \ldots, a_\lambda$ die Nullstellen von $Q(x, b)$, so daß

$$Q(x, b) = c\,(x - a_1)\,(x - a_2) \cdots (x - a_\lambda). \tag{2}$$

Für $y = b$ oder, was dasselbe ist, $\mathfrak{M}_b = 0$ gehe $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{q}$ über. Zu f von den Stellen, die bei $x = a_k$ in $R(b)$ übereinander liegen, gehören Primteiler des Körpers $K(b)$ oder $\mathfrak{M}_b$, die in $\mathfrak{q}$ enthalten sind. Diese seien mit $\mathfrak{p}_{k1}, \mathfrak{p}_{k2}, \ldots, \mathfrak{p}_{kf}$ bezeichnet, so daß

$$\mathfrak{q} = \prod_{k=1}^{\lambda} \mathfrak{p}_{k1}\,\mathfrak{p}_{k2} \cdots \mathfrak{p}_{kf}. \tag{3}$$

Da $IN(\mathfrak{p}_{ki}) = x - a_k$, so folgt aus (1), (2), (3), da es auf einen konstanten Faktor nicht ankommt,

$$IN(\mathfrak{q}) = \{IN(\mathfrak{Q})\}_{y=b}.$$

Wir haben stillschweigend vorausgesetzt, daß $Q(x, y)$ von x abhängt, daß also $\mathfrak{Q}$ weder ein Punktprimteiler ist noch daß y für $\mathfrak{Q} = 0$ konstant wird. Das Ergebnis gilt aber auch für diese Fälle, wenn wir nur b so wählen, daß $y - b$ nicht durch $\mathfrak{Q}$ teilbar wird. Es heiße dann b wieder regulär für $\mathfrak{Q}$. Es ist nämlich jetzt $\mathfrak{q} = 1$ und ferner ist $IN(\mathfrak{Q})$ entweder nach Definition oder für $y = b$ gleich 1.

Da die Idealnorm eines Produktes gleich dem Produkt der Idealnormen ist, so haben wir:

Es sei $\mathfrak{Q}$ ein Divisor. Ist dann b ein für $\mathfrak{Q}$ regulärer Wert von y und geht $\mathfrak{Q}$ für $y = b$ in $\mathfrak{q}$ über, so ist

$$IN(\mathfrak{q}) = \{IN(\mathfrak{Q})\}_{y=b}. \tag{4}$$

2. *Basen für die Vielfachen eines Divisors in K und $K(y)$.* (Vgl. A, I, Nr. 9),

Es sei η eine Basis für die Vielfachen des Divisors $\mathfrak{Q}^{-1}$. Das bedeutet: Die Funktion

$$R = g_1\eta_1 + g_2\eta_2 + \cdots + g_n\eta_n, \tag{5}$$

wo die g rational in x, y sind, ist dann und nur dann fast Vielfaches von $\mathfrak{Q}^{-1}$, wenn die g ganz sind. Es hat dann R die Form

$$R = \frac{\mathfrak{G}}{\mathfrak{B}\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\varrho}\mathfrak{M}^{\sigma}}, \tag{6}$$

wo $\mathfrak{G}$ ein ganzer Divisor ist und $\mathfrak{P}$ nur Punktprimteiler enthält. Im besonderen haben auch die n Funktionen η_k selbst die Form (6). Außerdem ist

$$|\eta|^2 = IN(\mathfrak{Q}^{-2})\, IN(\mathfrak{Z}), \tag{7}$$

wo $\mathfrak{Z}$ der Verzweigungsdivisor von K in bezug auf x, y ist.

Es sei b ein für $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{Z}$ regulärer Wert von y und es gehe $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{z}$ über für $y = b$. Nach A, I, Nr. 8 ist $\mathfrak{z}$ der Verzweigungsdivisor von $K(y)$ in bezug auf x, wenn wir noch annehmen, daß $\mathfrak{M}_b$ keine mehrfachen Stellen hat. Für $y = b$ gehe η in $\bar{\eta}$ über. Es ist dann jedes $\bar{\eta}_k$ bis auf die im Nenner $\mathfrak{l}$ von x enthaltenen Primteiler ein Vielfaches von $\mathfrak{q}^{-1}$ und außerdem ist wegen (7) und nach dem in Nr. 1 bewiesenen Satze

$$|\bar{\eta}|^2 = IN(\mathfrak{q}^{-2})\, IN(\mathfrak{z}).$$

Daraus folgt, daß $\bar{\eta}$ eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}^{-1}$ ist. Wir haben also:

Ist η eine Basis für die Vielfachen eines Divisors $\mathfrak{Q}^{-1}$ und ist b ein für $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Z}$ regulärer Wert von y und hat außerdem der Zähler $\mathfrak{M}_b$ von $y - b$ keine mehrfachen Stellen, so geht η für $y = b$ in eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}^{-1}$ über, wenn $\mathfrak{Q}$ für $y = b$ in $\mathfrak{q}$ übergeht.

3. *Ein Satz über die Defekte in bezug auf $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$.*

Da für $y = b$ der Nenner $\mathfrak{M}$ von y in $\mathfrak{l}$ übergeht, so geht die Klasse $(\mathfrak{Q}\mathfrak{M}^\beta)$ für $y = b$ in die Klasse $(\mathfrak{q})$ über. Es sei die Dimension $\{\mathfrak{q}\}$ von $(\mathfrak{q})$ gleich r und es seien $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_r$ r linear unabhängige ganze Divisoren dieser Klasse. Wir setzen $s_k = \mathfrak{g}_k/\mathfrak{q}$, so daß die s_k Funktionen des Körpers $K(b)$ sind.

Die Determinante der Anfangskoeffizienten der Elemente der Basis η bei ihrer Entwicklung nach fallenden Potenzen von x in der Umgebung von $x = \infty$ kann identisch verschwinden. Dann kann man ein aus rationalen Funktionen von y bestehendes unimodulares System q finden, sodaß für das System $\xi = \eta q$ die entsprechende Determinante nicht identisch verschwindet. Da die Determinante von q gleich 1 ist, so stimmt die Diskriminante $|\xi|^2$ der Basis ξ mit der von η überein und aus (7) folgt daher, daß die Determinante der Anfangskoeffizienten der Elemente des Systems ξ für $y = b$ dann und nur dann verschwindet, wenn sich für $y = b$ der Grad der Idealnorm von $\mathfrak{Q}^{-2}\mathfrak{Z}$ in x erniedrigt, wenn also b nicht regulär ist. Da die Elemente der Matrix q i. a. nicht ganz sind, so sind noch diejenigen Werte von y auszuschließen, für die Elemente von q unendlich werden. Es sind das übrigens nur solche Werte, die nicht regulär für $\mathfrak{Q}\mathfrak{Z}$ sind. Für $y = b$ gehe ξ in $\bar{\xi}$ über.

Da $|q| = 1$ und da die Elemente von q für $y = b$ nicht unendlich werden, so ist $\bar{\xi}$ ebenso wie $\bar{\eta}$ eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}^{-1}$ und wir können daher die Funktionen s_k in der Form

$$s_k = h_{k1}\bar{\xi}_1 + h_{k2}\bar{\xi}_2 + \cdots + h_{kn}\bar{\xi}_n \tag{8}$$

darstellen, wo die h ganze rationale Funktionen von x sind. Wir setzen

$$S_k = h_{k1}\xi_1 + h_{k2}\xi_2 + \cdots + h_{kn}\xi_n. \tag{9}$$

Da die Determinante der Anfangskoeffizienten der Elemente von ξ bei der Entwicklung nach fallenden Potenzen von x in der Umgebung von $x = \infty$ für $y = b$ nicht verschwindet, so wird S_k für unendliches x von derselben Ordnung unendlich oder null wie s_k. Wegen $\xi = \eta q$ können wir statt (9) auch schreiben

$$S_k = g_{k1}\eta_1 + g_{k2}\eta_2 + \cdots + g_{kn}\eta_n, \tag{10}$$

wo die g rational in x, y sind, und zwar ganz in x. Wir bezeichnen den Hauptnenner aller n^2 Funktionen g_{ki}, der eine ganze rationale Funktion von y ist, mit g und den Zähler

von g, wenn wir g als Funktion aus K in Primfaktoren zerlegt denken, mit $\mathfrak{B}$. Ist γ der Grad von g, so ist

$$\mathfrak{B} \sim \mathfrak{M}^{\gamma}. \tag{11}$$

Aus (10) und, da S_k für $y = b$ auch unter Berücksichtigung des Nenners von x für $y = b$ ein Vielfaches von $\mathfrak{q}^{-1}$ werden muß, folgt, daß S_k die Form hat

$$S_k = \frac{\mathfrak{H}_k}{\mathfrak{V}\mathfrak{Q}\mathfrak{B}\mathfrak{M}^{\sigma}}, \tag{12}$$

wo $\mathfrak{H}_k$ ein ganzer Divisor ist und $\mathfrak{V}$ nur Punktprimteiler enthält.

Ehe wir weitergehen, wollen wir bemerken, daß wir das in(12) enthaltene Ergebnis sehr viel einfacher erhalten können, wenn wir die Resultate der Dissertation (Halle 1927) von Herrn Sander benutzten. Wir wollen uns dabei auf den Fall beschränken, wo in $\mathfrak{Q}$ kein Primteiler enthalten ist, dessen Projektion die Form $y -$ konst hat. Im Körper $K(y)$ ist der Divisor $\mathfrak{Q}$ ein von y abhängiger Divisor $\mathfrak{q}$. Nach Herrn Sander können wir eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}^{-1}$ und damit auch diese Vielfachen selbst so bestimmen, daß wir im Körper $K(y)$ bleiben. Solcher Funktionen gibt es r linear unabhängige, wenn r die Dimension der Klasse $(\mathfrak{q})$ ist. Diese haben dann die Form (12). Dies alles gilt, solange y nicht speziell gewählt ist. Werte von y, für die es anders wird, können aber nur die sein, für die Verzweigungspunkte von $R(y)$ zusammenfallen oder nach $x = \infty$ gehen, oder für die, in $\mathfrak{q}$ enthaltene i. a. voneinander verschiedene Primteiler, zusammenfallen oder nach $x = \infty$ gehen. Das sind die Werte von y, die nicht regulär sind für $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{Z}$. Ist also b nicht einer der Ausnahmewerte, so geht jede der Funktionen S_k für $y = b$ in ein Vielfaches s_k von $\mathfrak{q}^{-1}$ über, wo $\mathfrak{q}$ jetzt der Divisor ist, in den $\mathfrak{Q}$ für $y = b$ übergeht. Damit die S_k für $y = b$ linear unabhängig bleiben, müssen wir noch solche Werte y' von y ausschließen, für die $y - y'$ die Projektion eines Verzweigungsprimteilers ist. Denn nur für solche Werte von y wird die Diskriminante einer Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}^{-1}$ gleich null.

Wir kehren zu den Funktionen S_k in (12) zurück. Die Projektionen der in $\mathfrak{V}$ enthaltenen Primteiler seien $(a_1, b_1,)$, (a_2, b_2), . . ., (a_h, b_h). Dann ist

$$H(y) = (y - b_1)\,(y - b_2) \cdots (y - b_h)$$

durch jeden in $\mathfrak{V}$ enthaltenen Primteiler teilbar und, wenn die positive ganze Zahl μ genügend groß gewählt wird, ist H^{μ} durch $\mathfrak{V}$ teilbar. Setzen wir also $T_k = H^{\mu} S_k$ und $\nu = \sigma + \mu h$, so hat T_k die Form

$$T_k = H^{\mu} S_k = \frac{\mathfrak{G}_k}{\mathfrak{Q}\mathfrak{B}\mathfrak{M}^{\nu}}, \tag{13}$$

wo $\mathfrak{G}_k$ ein ganzer Divisor ist. Da $H(b)$ konstant ist und $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{M}$ für $y = b$ in 1 übergehen, so geht für $y = b$ die Funktion T_k bis auf einen konstanten Faktor in $s_k = \mathfrak{g}_k/\mathfrak{q}$ über, woraus folgt, daß $\mathfrak{G}_k$ in $\mathfrak{g}_k$ übergeht. Aus (11) und (13) ergibt sich, daß $\mathfrak{G}_k \sim \mathfrak{Q}\mathfrak{M}^{\gamma+\nu}$. Es gibt also in der Klasse $(\mathfrak{Q}\mathfrak{M}^{\beta})$ einen ganzen Divisor, der in $\mathfrak{g}_k$ übergeht, wenn $\beta \geqq \gamma + \nu$, und zwar gilt das für $k = 1, 2, \ldots, r$. Setzen wir also $\beta_0 = \gamma + \nu$, so ist

$$\omega_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{M}^{\beta}) = 0 \quad \text{für} \quad \beta \geqq \beta_0.$$

Nehmen wir das Ergebnis hinzu, das wir erhalten, wenn wir x mit y vertauschen, so haben wir

Ist $\mathfrak{Q}$ irgendein Divisor, so gibt es zwei ganze Zahlen α_0 und β_0, so daß

$$\omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\alpha}) = 0 \text{ für } \alpha \geqq \alpha_0, \qquad \omega_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{M}^{\beta}) = 0 \text{ für } \beta \geqq \beta_0. \tag{14}$$

4. *Uber das Symbol* $[\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta}]$.

Es sei $(\mathfrak{T})$ eine Klasse und $(\mathfrak{T}')$ die Ergänzungsklasse, so daß

$$\mathfrak{T}\mathfrak{T}' \sim \mathfrak{K}, \tag{15}$$

wenn $(\mathfrak{K})$ die kanonische Klasse ist. Nach A, I, Nr. 11 ist, wenn wir setzen

$$[\mathfrak{T}] = [\mathfrak{T}'] = \{\mathfrak{T}\} + \{\mathfrak{T}'\} + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}'), \tag{16}$$

$$[\mathfrak{T}\mathfrak{P}] = [\mathfrak{T}] - \omega_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{T}\mathfrak{P}) + \omega_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{T}'), \tag{17}$$

wenn $\mathfrak{P}$ ein Primteiler oder ein ganzer Divisor ohne mehrfache Faktoren ist, der keine mehrfachen Stellen hat.

Wir ersetzen in (17) $\mathfrak{T}$ der Reihe nach durch $\mathfrak{T}\mathfrak{P}, \mathfrak{T}\mathfrak{P}^2, \ldots, \mathfrak{T}\mathfrak{P}^{\lambda-1}$ und addieren die so erhaltenen Gleichungen. Es ergibt sich

$$[\mathfrak{T}\mathfrak{P}^{\lambda}] = [\mathfrak{T}] - \sum_{k=1}^{\lambda} \{\omega_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{T}\mathfrak{P}^k) + \omega_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{T}'\mathfrak{P}^{1-k})\}. \tag{18}$$

Wir setzen in (18) einmal $\mathfrak{P} = \mathfrak{L}$ und dann $\mathfrak{P} = \mathfrak{M}$ und $\lambda = \mu$ und erhalten

$$[\mathfrak{T}\mathfrak{L}^{\lambda}] = [\mathfrak{T}] - \sum_{k=1}^{\lambda} \omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{T}\mathfrak{L}^k) + \sum_{k=1}^{\lambda} \omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{T}'\mathfrak{L}^{1-k}), \tag{19}$$

$$[\mathfrak{T}\mathfrak{M}^{\mu}] = [\mathfrak{T}] - \sum_{k=1}^{\mu} \omega_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{T}\mathfrak{M}^k) + \sum_{k=1}^{\mu} \omega_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{T}'\mathfrak{M}^{1-k}). \tag{20}$$

In (19) ersetzen wir $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{T}\mathfrak{M}^{\mu}$, also $\mathfrak{T}'$ durch $\mathfrak{T}'\mathfrak{M}^{-\mu}$ und in (20) $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{T}\mathfrak{L}^{\lambda}$, also $\mathfrak{T}'$ durch $\mathfrak{T}'\mathfrak{L}^{-\lambda}$. Dabei wählen wir λ und μ so groß, daß

$$(\mathfrak{T}'\mathfrak{L}^{1-k}\mathfrak{M}^{-\mu}, \mathfrak{L}) = (\mathfrak{T}', \mathfrak{L}) - \mu n < 0, (\mathfrak{T}'\mathfrak{L}^{-\lambda}\mathfrak{M}^{1-k}, \mathfrak{M}) = (\mathfrak{T}', \mathfrak{M}) - \lambda n < 0. \tag{21}$$

Dann ist für jedes k

$$\omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{T}'\mathfrak{L}^{1-k}\mathfrak{M}^{-\mu}) = 0, \qquad \omega_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{T}'\mathfrak{L}^{-\lambda}\mathfrak{M}^{1-k}) = 0. \tag{22}$$

Wir erhalten also

$$[\mathfrak{T}\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\mu}] = [\mathfrak{T}\mathfrak{M}^{\mu}] - \sum_{k=1}^{\lambda} \omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{T}\mathfrak{L}^k\mathfrak{M}^{\mu}) = [\mathfrak{T}\mathfrak{L}^{\lambda}] - \sum_{k=1}^{\mu} \omega_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{T}\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^k). \tag{23}$$

Ehe wir hieraus weitere Folgerungen ziehen, müssen wir einige Hilfssätze herleiten.

5. *Hilfsätze aus der Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen.*

Es sei B ein algebraischer Körper der einen unabhängigen Veränderlichen y. Er sei vom Grade n in bezug auf y. Der Verzweigungsdivisor in bezug auf y sei $\mathfrak{z}$ und Zähler und Nenner von y seien $\mathfrak{m}_0$ und $\mathfrak{m}$. Die kanonische Klasse $(\mathfrak{z}\mathfrak{m}^{-2})$ sei mit $(\mathfrak{k})$ bezeichnet. Es gilt dann:

1. *Es sei* $\mathfrak{q}$ *ein Divisor und es sei die Klasse* $(\mathfrak{q}\mathfrak{m}^{\beta-1})$ *regulär. Ferner seien alle ganzen Divisoren der Klasse* $(\mathfrak{q}\mathfrak{m}^{\beta})$ *von den ganzen Divisoren*

$$\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_r \tag{24}$$

linear abhängig. Dann sind für $\mu > 0$ *alle ganzen Divisoren der Klasse* $(\mathfrak{q}\mathfrak{m}^{\beta+\mu})$ *linear abhängig von den Divisoren*

$$\mathfrak{m}_0^{\mu}\mathfrak{g}_k, \mathfrak{m}_0^{\mu-1}\mathfrak{m}\mathfrak{g}_k, \ldots, \mathfrak{m}^{\mu}\mathfrak{g}_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, r). \tag{25}$$

Der Einfachheit halber nehmen wir zum Beweise an, daß bei $y = \infty$ kein Verzweigungspunkt liegt und kein in $\mathfrak{q}$ enthaltener Primteiler. Es sei $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{q}^{-1}$. Es sei η_k für unendliches y von der Ordnung r_k, d. h. es sei, wenn $\eta_k = \eta_{k1}, \eta_{k2}, \ldots, \eta_{kn}$ die zu η_k konjugierten Funktionen sind, für die Umgebung von $y = \infty$

$$\eta_{ki} = y^{r_k}(a_{ki} + \cdots),$$

wo in der Klammer eine gewöhnliche Potenzreihe von y^{-1} steht. Die Determinante der Anfangskoeffizienten a_{ki} sei nicht null, was man immer erreichen kann. Es sind dann die Funktionen

$$\eta_k, y\eta_k, y^2\eta_k, \ldots, y^{s-r_k}\eta_k, \tag{26}$$

soweit $s \geqq r_k$, von der Form

(27) $$\frac{\mathfrak{g}}{\mathfrak{q}\mathfrak{m}^s},$$

wo $\mathfrak{g}$ ganz ist, und umgekehrt ist jede Funktion der Form (27) von den Funktionen (26) linear abhängig. Wir wählen jetzt s so groß, daß $s \geqq r_k$ für $k = 1, 2, \ldots, n$, und setzen

$$\eta_k = \frac{\mathfrak{a}_k}{\mathfrak{q}\mathfrak{m}^{r_k}},$$

so daß

$$y^\nu \eta_k = \frac{\mathfrak{m}_0^\nu \mathfrak{a}_k}{\mathfrak{q}\mathfrak{m}^{\nu+r}} = \frac{\mathfrak{m}_0^\nu \mathfrak{m}^{s-r_k-\nu}\mathfrak{a}_k}{\mathfrak{q}\mathfrak{m}^s}.$$

Daher sind die ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{q}\mathfrak{m}^s)$ linear abhängig von den Divisoren

(28) $$\mathfrak{m}^{s-r_k}\mathfrak{a}_k, \quad \mathfrak{m}^{s-r_k-1}\mathfrak{m}_0\mathfrak{a}_k, \ldots, \mathfrak{m}_0^{s-r_k}\mathfrak{a}_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Nach Voraussetzung ist die Klasse $(\mathfrak{q}\mathfrak{m}^{\beta-1})$ regulär, was bedeutet, daß ihre Ergänzungsklasse die Dimension null hat. Daraus folgt, daß $\beta \geqq r_k$ für $k = 1, 2, \ldots n$. Wählen wir daher in (28) einmal $s = \beta$ und dann $s = \beta + \mu$, so folgt für $\mu > 0$: Die ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{q}\mathfrak{m}^\beta)$ sind linear abhängig von den Divisoren

(29) $$\mathfrak{m}^{\beta-r_k}\mathfrak{a}_k, \quad \mathfrak{m}^{\beta-r_k-1}\mathfrak{m}_0\mathfrak{a}_k, \ldots, \mathfrak{m}_0^{\beta-r_k}\mathfrak{a}_k$$

und die ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{q}\mathfrak{m}^{\beta+\mu})$ von den Divisoren

(30) $$\mathfrak{m}^{\beta+\mu-r_k}\mathfrak{a}_k, \quad \mathfrak{m}^{\beta+\mu-r_k-1}\mathfrak{m}_0\mathfrak{a}_k, \ldots, \mathfrak{m}_0^{\beta+\mu-r_k}\mathfrak{a}_k.$$

Bezeichnen wir die Divisoren (29) in irgendeiner Reihenfolge mit

(31) $$\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \ldots, \mathfrak{h}_\varrho,$$

so sind die Divisoren (30) unter den Divisoren

(32) $$\mathfrak{m}_0^\mu \mathfrak{h}_k, \quad \mathfrak{m}_0^{\mu-1}\mathfrak{m}\mathfrak{h}_k, \ldots, \mathfrak{m}^\mu \mathfrak{h}_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, \varrho)$$

enthalten. Da nach Voraussetzung und nach dem Bewiesenen die Divisoren $\mathfrak{g}_k$ (24) von den $\mathfrak{h}_i$ (31) linear abhängen und umgekehrt, so hängen auch die Divisoren (25) und (32) gegenseitig linear voneinander ab. Da aber die ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{q}\mathfrak{m}^{\beta+\mu})$ linear von den Divisoren (32) abhängen, so auch von den Divisoren (25), was zu beweisen war.

2. Den unter 1. bewiesenen Satz können wir auch in folgender Weise aussprechen.

Es sei $(\mathfrak{c})$ *eine Klasse, die mindestens zwei teilerfremde ganze Divisoren* $\mathfrak{c}_1$ *und* $\mathfrak{c}_2$ *enthält. Es sei ferner* $(\mathfrak{q})$ *irgendeine Klasse und es sei die Klasse* $(\mathfrak{q}\mathfrak{c}^{\beta-1})$ *regulär. Sind dann* $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_r$ *ganze Divisoren, von denen die ganzen Divisoren der Klasse* $(\mathfrak{q}\mathfrak{c}^\beta)$ *linear abhängen, so hängen die ganzen Divisoren der Klasse* $(\mathfrak{q}\mathfrak{c}^{\beta+\mu})$ *für* $\mu > 0$ *linear ab von den Divisoren*

(33) $$\mathfrak{c}_1^\mu \mathfrak{g}_k, \mathfrak{c}_1^{\mu-1}\mathfrak{c}_2\mathfrak{g}_k, \ldots, \mathfrak{c}_2^\mu \mathfrak{g}_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Um einzusehen, daß dieser Satz im wesentlichen mit dem unter 1. bewiesenen übereinstimmt, braucht man nur die Funktion $\mathfrak{c}_1/\mathfrak{c}_2$ zur unabhängigen Veränderlichen y zu machen.

3. Sind $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_\mu$ μ verschiedene Divisoren der linearen Schar $\mathfrak{c}_1 + \xi\mathfrak{c}_2$, so können wir in dem Satz unter 2. die Divisoren (33) ersetzen durch die Divisoren

(34) $$\mathfrak{a}_1^\mu \mathfrak{g}_k, \mathfrak{a}_2^\mu \mathfrak{g}_k, \ldots, \mathfrak{a}_\mu^\mu \mathfrak{g}_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, r).$$

Ist nämlich $\mathfrak{a}_i = \mathfrak{c}_1 + \xi_i \mathfrak{c}_2$, so folgt aus den Gleichungen

$$\mathfrak{a}_i^\mu = \mathfrak{c}_1^\mu + \mu\xi_i \mathfrak{c}_1^{\mu-1}\mathfrak{c}_2 + \cdots + \xi_i^\mu \mathfrak{c}_2^\mu, \qquad (i = 1, 2, \ldots \mu),$$

daß die Divisoren $\mathfrak{a}_1^\mu, \mathfrak{a}_2^\mu, \ldots, \mathfrak{a}_\mu^\mu$ von den Divisoren $\mathfrak{c}_1^\mu, \mathfrak{c}_1^{\mu-1}\mathfrak{c}_2, \ldots, \mathfrak{c}_2^\mu$ linear abhängig sind und umgekehrt.

6. *Verwandlung des Satzes unter* 1. *der vorigen Nr. in Sätze über Defekte.*

1. *Es sei* $(\mathfrak{Q})$ *eine Klasse des Körpers K und a ein regulärer Wert von x. Für* $x = a$ *geht K in den Körper* $\mathfrak{L}_a$ *über. Es mögen ferner für* $x = a$ *übergehen* $(\mathfrak{Q})$ *in* $(\mathfrak{q})$, $\mathfrak{M}_0$ *in* $\mathfrak{m}_0$ *und* $\mathfrak{M}$ *in* $\mathfrak{m}$ *während* $\mathfrak{L}$ *zu* 1 *wird. Es sei* β *so groß gewählt daß die Klasse* $(\mathfrak{q}\mathfrak{m}^{\beta-1})$ *in die* $(\mathfrak{Q}\mathfrak{M}^{\beta-1})$ *für* $x = a$ *übergeht regulär ist. Ist dann*

$$\omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{M}^{\beta}) = 0, \tag{35}$$

so ist auch

$$\omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{M}^{\beta+\mu}) = 0 \text{ für } \mu > 0. \tag{36}$$

Zum Beweise identifizieren wir den Körper $\mathfrak{L}_a$ mit dem Körper B der vorigen Nr. Sind $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_r$ ganze Divisoren von denen die ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{q}\mathfrak{m}^{\beta})$ linear abhängen, so folgt aus der Voraussetzung (35), daß es in $(\mathfrak{Q}\mathfrak{M}^{\beta})$ r ganze Divisoren $\mathfrak{G}_k$ derart gibt, daß $\mathfrak{G}_k$ für $x = a$ in $\mathfrak{g}_k$ übergeht. In $(\mathfrak{Q}\mathfrak{M}^{\beta+\mu})$ sind dann die Divisoren

$$\mathfrak{M}_0^{\mu}\mathfrak{G}_k, \mathfrak{M}_0^{\mu-1}\mathfrak{M}\mathfrak{G}_k, \ldots, \mathfrak{M}^{\mu}\mathfrak{G}_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

enthalten und diese gehen für $x = a$ in die Divisoren (25) über, von denen bei den gemachten Voraussetzungen die ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{q}\mathfrak{m}^{\beta+\mu})$ linear abhängen. Das ist aber die Behauptung (36).

In dem bewiesenen Satze können wir $\mathfrak{Q}$ durch $\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\lambda}$ ersetzen. Da für $x = a$ $\mathfrak{L}$ in 1 übergeht, so wird die Klasse $(\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\beta-1})$ gerade so zur Klasse $(\mathfrak{q}\mathfrak{m}^{\beta-1})$ für $x = a$ wie $(\mathfrak{Q}\mathfrak{M}^{\beta-1})$. Die Bedingung für β, daß die Klasse, in die $(\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\beta-1})$ für $x = a$ übergeht, regulär ist, ist also ganz unabhängig von λ. Es sei zunächst β_0 so gewählt, daß die Klasse $(\mathfrak{q}\mathfrak{m}^{\beta_0-1})$ regulär ist. Dann werde λ_0 so bestimmt, daß $\omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\beta_0}) = 0$ für $\lambda \geqq \lambda_0$, was nach Nr. 3 immer möglich ist. Dann folgt aus dem eben Bewiesenen, wenn wir gleich den Satz hinzunehmen, der durch Vertauschen von x und y entsteht:

Ist $(\mathfrak{Q})$ *irgendeine Klasse, so gibt es ganze Zahlen* $\alpha_0, \beta_0, \lambda_0, \mu_0$, *so daß*

$$\omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\beta}) = 0 \text{ für } \lambda \geqq \lambda_0, \ \beta \geqq \beta_0, \qquad \omega_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\mu}) = 0 \text{ für } \alpha \geqq \alpha_0, \ \mu \geqq \mu_0.$$

7. *Fortsetzung von Nr. 4. Über das Symbol* $[\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta}]$.

Es seien $(\mathfrak{Q})$ und $(\mathfrak{Q}')$ eine Klasse und ihre Ergänzungsklasse. Wir setzen

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\alpha_0}\mathfrak{M}^{\beta_0}, \quad \text{also} \quad \mathfrak{T}' = \mathfrak{Q}'\mathfrak{L}^{-\alpha_0}\mathfrak{M}^{-\beta_0}.$$

Die ganzen Zahlen α_0 und β_0 wählen wir so groß, daß erstens

$$(\mathfrak{T}', \mathfrak{L}) < 0, \quad (\mathfrak{T}', \mathfrak{M}) < 0, \quad \text{also} \quad \omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{T}'\mathfrak{L}^{1-k}) = \omega_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{T}'\mathfrak{M}^{1-k}) = 0$$

und daß zweitens

$$\omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{T}\mathfrak{L}^{k}\mathfrak{M}^{\mu}) = \omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\alpha_0+k}\mathfrak{M}^{\beta_0+\mu}) = 0 \text{ für } k \geqq 0, \ \mu \geqq 0,$$

was nach der vorigen Nr. immer möglich ist. Dann folgt aus (20) und (23) in Nr. 4

$$[\mathfrak{T}\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\mu}] = [\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\alpha_0+\lambda}\mathfrak{M}^{\beta_0+\mu}] = [\mathfrak{T}] = [\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\alpha_0}\mathfrak{M}^{\beta_0}] \text{ für } \lambda \geqq 0, \ \mu \geqq 0.$$

Wir haben also den Satz:

Ist $(\mathfrak{Q})$ *irgendeine Klasse, so gibt es zwei ganze Zahlen* α_0, β_0 *so daß*

$$[\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta}] = [\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\alpha_0}\mathfrak{M}^{\beta_0}] \text{ für } \alpha \geqq \alpha_0, \ \beta \geqq \beta_0.$$

Es ist also $[\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta}]$ für große Werte von α und β von α und β unabhängig und nur noch von $(\mathfrak{Q})$ abhängig und vielleicht von der Wahl der unabhängigen Veränderlichen. Wir bezeichnen diese Zahl mit $\tau(\mathfrak{Q})$, setzen also

$$\tau(\mathfrak{Q}) = [\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\alpha_0}\mathfrak{M}^{\beta_0}] \tag{37}$$

und es ist

$$\tau(\mathfrak{Q}) = \tau(\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\mu}) \quad \text{für} \quad \lambda \geqq 0, \ \mu \geqq 0. \tag{38}$$

Im besonderen bezeichnet man $\tau(\mathfrak{K})$ *mit* $p_a + 1$ *und nennt* p_a *das arithmetische Geschlecht des Körpers K. Wir haben also für genügend große Werte von* α *und* β

(39) $$p_a + 1 = \tau(\mathfrak{K}) = [\mathfrak{K}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta}].$$

Es seien λ und μ zwei positive ganze Zahlen und es sei $\mathfrak{A}$ ein Primteiler ohne mehrfache Stellen aus der Klasse $(\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\mu})$. Es sei also

(40) $$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\mu}, \quad (\mathfrak{A}, \mathfrak{A}) = 2\lambda\mu n.$$

Wir setzen in (17), Nr. 4 $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{Q}\mathfrak{A}^{\alpha}$, also $\mathfrak{T}' = \mathfrak{Q}'\mathfrak{A}^{-\alpha}$, wo $\mathfrak{Q}$ irgendeinen Divisor bedeuten soll. Wir wählen α so groß, daß erstens

(41) $$(\mathfrak{T}', \mathfrak{A}) = (\mathfrak{Q}', \mathfrak{A}) - 2\alpha\lambda\mu n < 0, \quad \text{also} \quad \omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{T}') = 0$$

und zweitens so, daß

(42) $$[\mathfrak{T}\mathfrak{A}] = [\mathfrak{T}] = \tau(\mathfrak{Q}).$$

Dann folgt $\omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{A}^{\alpha+1}) = 0$. Wenn eine Zahl α den angegebenen Bedingungen genügt, so jede größere erst recht. Daher haben wir:

Es sei $(\mathfrak{Q})$ eine Klasse und $\mathfrak{A}$ ein Primteiler ohne mehrfache Stellen der Klasse $(\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\mu})$, wo λ und μ positive ganze Zahlen sind. Dann gibt es eine ganze Zahl α_0, so daß

(43) $$\omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{A}^{\alpha}) = 0 \quad \textit{für} \quad \alpha \geqq \alpha_0.$$

Wählt man λ und μ hinreichend groß, so sind die Bedingungen (41), (42) schon für $\alpha = 1$ erfüllt und wir können in (43) $\alpha_0 = 2$ wählen. Also:

Ist $(\mathfrak{Q})$ irgendeine Klasse, so gibt es immer einen Primteiler $\mathfrak{A}$, so daß

(44) $$\omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{A}^{\alpha}) = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \geqq 2, \quad \tau(\mathfrak{Q}) = [\mathfrak{Q}\mathfrak{A}].$$

Aus (17) folgt dann für $\mathfrak{T} = \mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}$

(45) $$[\mathfrak{Q}] = \tau(\mathfrak{Q}) + \omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{A}) - \omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{Q}').$$

8. *Die Körper K_1 und K_2.*

Der Körper der einen unabhängigen Veränderlichen y, der aus K entsteht, wenn man x einen konstanten Wert beilegt, kann für jeden Wert $\bar{x}$ von x zerfallen. Wir bezeichnen diesen Körper mit $\mathfrak{L}_{\bar{x}}$ und ebenso den zugehörigen Divisor, d. h. den Zähler von $x - \bar{x}$. Es zerfalle $\mathfrak{L}_{\bar{x}}$ in n_1 Körper oder Primteiler $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{n_1}$, so daß für den Divisor $\mathfrak{L}_{\bar{x}}$ die Zerlegung besteht

$$\mathfrak{L}_{\bar{x}} = \mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2 \ldots \mathfrak{P}_{n_1}.$$

Entsprechend dieser Zerlegung muß das Polynom $F(x, y, z)$, durch dessen Nullsetzen der Körper K definiert wird, für jeden Wert von x rational in y und z zerfallen in n_1 Faktoren. Jeder dieser Faktoren muß algebraisch von x abhängen. Einer dieser Faktoren sei g. Es ist g eine ganze rationale Funktion von y und z mit algebraischen Funktionen von x als Koeffizienten. Es sei ξ eine in bezug auf x primitive Größe dieses Koeffizientenkörpers und es sei

(46) $$\varphi(\xi, x) = 0$$

die zwischen x und ξ bestehende rational unzerlegbare Gleichung. Ist ξ_1 eine passend gewählte Lösung von (46), so sind die Koeffizienten von g rationale Funktionen von x und ξ_1. Da ξ_1 durch analytische Fortsetzung in jede andere Lösung ξ_k von (46) übergeführt werden kann und dabei $F(x, y, z)$ ungeändert bleibt, so folgt, daß außer $g(\xi_1)$ auch alle Funktionen $g(\xi_k)$ Faktoren von F sind. Da aber das Produkt dieser Faktoren rational in y, z und in x ist und da F nicht rational zerfällt, so enthält F auch keine weiteren Faktoren. Daraus folgt, daß die Gleichung (46) in ξ vom Grade n_1 ist und daß F in folgender Form zerfällt:

(47) $$F(x, y, z) = g(x, \xi_1, y, z)g(x, \xi_2, y, z) \ldots g(x, \xi_{n_1}, y, z).$$

Bei passender Wahl der Bezeichnung ist der Primteiler oder Körper $\mathfrak{P}_k$ durch die Gleichung $g(\bar{x}, \xi_k) = 0$ definiert. Die Körper $\mathfrak{P}_k$ sind also analytisch ineinander überführbar und haben infolgedessen dasselbe Geschlecht.

Die n Lösungen von $F = 0$ in z seien $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Die Bezeichnung sei so gewählt, daß der erste Faktor auf der rechten Seite von (47) für $z = z_1$ verschwindet, die anderen also nicht. Da ξ einer Gleichung vom Grade n_1 genügt, so können wir $g(x, \xi, y, z)$ als ganze rationale Funktion von ξ höchstens vom Grade $n_1 - 1$ annehmen. Die beiden ganzen rationalen Funktionen $\varphi(\xi, x)$ und $g(x, \xi, y, z_1)$ von ξ haben dann die Nullstelle ξ_1 gemeinsam und nur diese, so daß sich durch Bestimmung des größten gemeinsamen Teilers ξ_1 als rationale Funktion von x, y, z_1 ergibt. Das heißt, mindestens eine der Lösungen von (46) gehört dem Körper K an. Es ist also der durch (46) definierte algebraische Körper (ξ, x) der einen Veränderlichen x ein Unterkörper von K, also auch von dem Körper K_1, der aus denjenigen Funktionen aus K besteht, die nur von x abhängen. Es ist aber leicht zu sehen, daß der Körper (ξ, x) mit K_1 identisch ist. Es sei nämlich K_1 vom Grade ν über x und es sei ζ eine in bezug auf x primitive Größe aus K_1. Einem Werte a von x entsprechen dann ν i. a. verschiedene Werte von ζ. Für $x = a$ entstehen also aus K ν Körper oder Primteiler, je nach dem Werte, den man ζ beilegt. D. h. aber, der Zähler $\mathfrak{L}_a$ von $x - a$ zerfällt in ν Primteiler, und zwar für jedes nicht speziell gewählte a. Da aber $\mathfrak{L}_a$ andrerseits in n_1 Primteiler zerfällt, so ist $\nu = n_1$ und der Körper (ξ, x) mit K_1 identisch. Das Geschlecht von K_1 bezeichnen wir wie in A, I, Nr. 1 mit p_1 und das der $\mathfrak{P}_k$ mit p'. Wir haben also:

Es sei der Körper K_1, der alle und nur die Funktionen aus K enthält, die allein von x abhängen, vom Grade n_1 über dem Körper (x) der rationalen Funktionen von x. Dann zerfällt der algebraische Körper $\mathfrak{L}_x$ der einen unabhängigen Veränderlichen y, der aus K entsteht wenn man x als Konstante auffaßt in n_1 Körper $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_{n_1}$, die dadurch ineinander übergeführt werden können daß man x passende geschlossene Wege in der x-Ebene durchlaufen läßt. Während die Körper $\mathfrak{L}_x$ eindeutig den Werten von x zugeordnet sind, sind die Körper $\mathfrak{P}_k$ eineindeutig den Stellen des Körpers K_1 zugeordnet. Ist p' das Geschlecht der Körper $\mathfrak{P}_k$ und p_1 das von K_1 so können wir auch sagen: Die Körper $\mathfrak{P}_k$ bilden ein — i. a. nicht lineares — Büschel des Geschlechtes p_1 von Körpern oder Primteilern vom Geschlechte p'. Und wenn umgekehrt der Körper $\mathfrak{L}_x$ für nicht speziell gewähltes x in n_1 Körper zerfällt so ist der Körper K_1 vom Grade n_1 über dem Körper (x) und steht zu den Faktoren von $\mathfrak{L}_x$ in der angegebenen Beziehung.

Ein entsprechender Satz besteht natürlich für den Körper K_2 und die Körper $\mathfrak{M}_y$.

Es sei a ein regulärer Wert von x und der Zähler $\mathfrak{L}_a$ von $x - a$ zerfalle in die n_1 Primteiler $\mathfrak{P}_k$. In der Sprache der Algebraiker ist dann der Körper $\mathfrak{L}_a$ die direkte Summe der n_1 Körper $\mathfrak{P}_k$. Wir wollen eine Eigenschaft solch eines zerfallenden Körpers herleiten, die wir in der nächsten Nr. gebrauchen. Während es in einem nicht zerfallenden Körper nur eine linear unabhängige Funktion mit dem Nenner 1 gibt, nämlich die Zahl 1 oder irgendeine von 0 verschiedene Konstante, gibt es in $\mathfrak{L}_a$ n_1 derartige linear unabhängige Funktionen. Es gibt nämlich in $\mathfrak{L}_a$ n_1 Funktionen A_i derart daß A_k in $\mathfrak{P}_k$ den Wert 1 hat, während A_k in den anderen Körpern $\mathfrak{P}_i$ identisch verschwindet. Die allgemeinste Funktion in $\mathfrak{L}_a$ mit dem Nenner 1, die ja konstant sein muß, ist dann die Funktion

$$A = c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_{n_1} A_{n_1},$$

wo die c_i konstant sind. Diese Funktion hat in $\mathfrak{P}_k$ den Wert c_k. Während also in einem nicht zerfallenden Körper die Hauptklasse (1) die Dimension 1 hat hat sie in einem in n_1 Primkörper zerfallenden Körper die Dimension n_1.

9. *Eine Gleichung für $p_g - p_a$.*

In (20) und (23), Nr. 4 wählen wir $\mathfrak{T} = \mathfrak{R}'$ also $\mathfrak{T}' = 1$. Nach A, I, Nr. 5 ist $\{\mathfrak{R}\} = p_g$, $\{1\} = 1$, wo p_g das geometrische Geschlecht von $\mathfrak{R}$ ist. Daher wird

(48) $$[\mathfrak{K}] = \{\mathfrak{K}\} + \{1\} + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{K}, 1) = p_g + 1.$$

Es sei b ein regulärer Wert von y. Die Klasse $(\mathfrak{M}^{1-k})$ enthält für $k = 1$ den einen ganzen Divisor 1 und für $k > 1$ keinen ganzen Divisor. Sie geht für $\mathfrak{M}_b = 0$ in die Hauptklasse des Körpers $\mathfrak{M}_b$ über, die n_2 linear unabhängige ganze Divisoren hat. Daher ist

(49) $$\omega_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{M}^{1-k}) = \begin{cases} n_2 - 1 & \text{für} \quad k = 1 \\ n_2 & \text{für} \quad k > 1 \end{cases}.$$

Wir erhalten daher aus (20) und (23), Nr. 4, wenn wir λ und μ so groß wählen, daß $[\mathfrak{K}\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\mu}] = \tau(\mathfrak{K}) = p_a + 1$,

(50) $$p_g - p_a = \sum_{k=1}^{\mu} \omega_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{K}\mathfrak{M}^k) + \sum_{k=1}^{\lambda} \omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{K}\mathfrak{L}^k\mathfrak{M}^{\mu}) - n_2\mu + 1.$$

Nach (29), A, I, Nr. 10 können wir setzen

(51) $$\omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{K}\mathfrak{L}\mathfrak{M}^{\mu}) = n_2\mu + p_2 - 1 + \varepsilon_1, \text{ wo } \varepsilon_1 \geqq 0.$$

Wir benutzen ferner, daß

(52) $$\pi - p_2 = \omega_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{K}\mathfrak{M}) - \varepsilon_2, \text{ wo } \varepsilon_2 \geqq 0,$$

wenn π die Zahl der linear unabhängigen totalen Differentiale erster Gattung bedeutet. (Vgl. B, Formel (46). Dieses Journal Bd. 167, S. 358). Außerdem benutzen wir, daß $\pi \geqq p_g - p_a$, daß wir also setzen können

(53) $$p_g - p_a = \pi - \varepsilon_3, \text{ wo } \varepsilon_3 \geqq 0.$$

Hierzu vergleiche man III, Nr. 8 dieser Arbeit, wo dieser Satz zwar nicht bewiesen ist, aber angegeben wird, wie man ihn bewiesen hat. Setzen wir noch

(54) $$\sum_{k=2}^{\mu} \omega_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{K}\mathfrak{M}^k) = \varepsilon_4 \geqq 0, \quad \sum_{k=2}^{\lambda} \omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{K}\mathfrak{L}^k\mathfrak{M}) = \varepsilon_5 \geqq 0,$$

so folgt aus (50) bis (54)

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4 + \varepsilon_5 = 0.$$

Da aber alle ε_l größer oder gleich 0 sind, so sind sie alle 0 und aus (51) bis (54) folgt, wenn wir gleich die Formeln hinzufügen, die sich durch Vertauschen von x mit y ergeben,

(55) $$\pi = p_1 + \omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{K}\mathfrak{L}) = p_2 + \omega_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{K}\mathfrak{M}) = p_g - p_a,$$

(56) $$\omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{K}\mathfrak{L}^k) = \omega_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{K}\mathfrak{M}^k) = 0 \quad \text{für} \quad k \geqq 2,$$

(57) $$\omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{K}\mathfrak{L}\mathfrak{M}^{\mu}) = n_2\mu + p_2 - 1 \text{ für } \mu \geqq 1, \quad \omega_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{K}\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}) = n_1\lambda + p_1 - 1 \text{ für } \lambda \geqq 1,$$

(58) $$\omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{K}\mathfrak{L}^k\mathfrak{M}^{\mu}) = \omega_{\mathfrak{M}}(\mathfrak{K}\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^k) = 0 \quad \text{für} \quad k \geqq 2,\ \lambda \geqq 1,\ \mu \geqq 1,$$

(59) $$[\mathfrak{K}\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\mu}] = p_a + 1 \quad \text{für} \quad \lambda \geqq 1,\ \mu \geqq 1.$$

Daß in (58), (59) λ und μ mindestens gleich 1 sein müssen, folgt daraus, daß (23) nur unter der Bedingung (22) gilt.

Aus (55) folgt noch, daß p_a eine Invariante des Körpers K ist, also unabhängig von der Wahl der unabhängigen Veränderlichen x, y und von der Definition der Stellen ist, da π und p_g ihrer Bedeutung nach invariant sind.

10. *Verallgemeinerung von Sätzen der Nrn.* 3 *und* 7.

1. Wir beweisen zunächst folgenden Satz:

Es sei $(\mathfrak{C})$ *eine Klasse der Dimension* 2. *Sie enthalte zwei teilerfremde linear unabhängige ganze Divisoren* $\mathfrak{C}_1$ *und* $\mathfrak{C}_2$, *die sich nicht schneiden. Es sei also der Grad* $(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}) = (\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2) = 0$. *Ist dann* $(\mathfrak{Q})$ *irgendeine Klasse, so gibt es eine ganze Zahl* α_0, *so daß*

(60) $$\omega_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{C}^{\alpha}) = 0 \quad \textit{für} \quad \alpha \geqq \alpha_0.$$

Zum Beweise wählen wir die Funktion $\mathfrak{C}_1/\mathfrak{C}_2$ als die eine unabhängige Veränderliche x. Da $\mathfrak{C}_1$ und $\mathfrak{C}_2$ einander nicht schneiden, so werden Zähler und Nenner von x an

keiner Stelle gleichzeitig null, so daß das gewählte x an keiner Stelle unbestimmt wird. Es ist daher nicht notwendig, die Definition der Stellen abzuändern, und es ist $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{L}_0$, $\mathfrak{C}_2 = \mathfrak{L}$. Die Behauptung (60) folgt daher einfach aus (14), Nr. 3.

2. Nicht ganz so einfach ist der Beweis des folgenden Satzes:

Es sei $(\mathfrak{C})$ *eine Klasse, deren Dimension mindestens* 3 *ist. Sie enthalte drei ganze linear unabhängige zu je zweien teilerfremde Divisoren* $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2, \mathfrak{C}_3$, *die keine allen gemeinsame Schnittpunkte haben. Ist dann* $(\mathfrak{Q})$ *irgendeine Klasse, so gibt es eine ganze Zahl* α_0, *so daß*

$$\omega_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{C}^{\alpha}) = 0 \quad \textit{für} \quad \alpha \geqq \alpha_0. \tag{61}$$

Es sei ξ irgendeine Konstante. Wir setzen

$$\mathfrak{C}_0 = \mathfrak{C}_1 + \xi\mathfrak{C}_2, \quad x = \frac{\mathfrak{C}_0}{\mathfrak{C}_3} = \frac{\mathfrak{L}_0}{\mathfrak{L}}. \tag{62}$$

Zähler und Nenner des so definierten x haben jetzt gemeinsame Stellen, so daß es Stellen gibt, an denen x unbestimmt wird. Da aber für alle unsere Betrachtungen wesentlich ist, daß die unabhängigen Veränderlichen an allen Stellen bestimmte Werte annehmen, so müssen wir die Definition derjenigen Stellen abändern, wo Zähler und Nenner unseres x einander treffen. Diese Stellen sind nach der Noetherschen Methode in Stellen höherer Ordnung so aufzulösen [4]), daß Zähler und Nenner von x keinen gemeinsamen Schnittpunkt mehr haben. Dadurch werden etwa ϱ Primteiler $\mathfrak{b}_i$ zweiter Art in Primteiler $\mathfrak{B}_i$ erster Art verwandelt. $\mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{C}_3$ werden durch einen ganzen Divisor $\mathfrak{b}$ teilbar, der aus den $\mathfrak{b}_i$ zusammengesetzt ist, und wenn wir mit $\mathfrak{B}$ den Divisor bezeichnen, der aus $\mathfrak{b}$ entsteht, wenn man die $\mathfrak{b}_i$ durch die $\mathfrak{B}_i$ ersetzt, so ist

$$\mathfrak{B}\mathfrak{L}_0 = \mathfrak{C}_0, \qquad \mathfrak{B}\mathfrak{L} = \mathfrak{C}_3. \tag{63}$$

Die Divisoren $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{C}_3$ unterscheiden sich durch den Faktor $\mathfrak{B}$, aber die Körper $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{C}_3$ sind dieselben. Es ist also $\omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{T}) = \omega_{\mathfrak{C}_3}(\mathfrak{T}) = \omega_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{T})$ für jede Klasse $(\mathfrak{T})$. Für $\mathfrak{L} = 0$ oder, was dasselbe ist, für $\mathfrak{C}_3 = 0$ geht $\mathfrak{L}_0$ in 1 über. Ferner mögen $\mathfrak{C}_0, \mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2$ und $(\mathfrak{Q})$ zu $\mathfrak{c}_0, \mathfrak{c}_1, \mathfrak{c}_2$ und $(\mathfrak{q})$ werden. Aus (63) folgt, daß $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{c}_0$ übergeht, da $\mathfrak{L}_0$ zu 1 wird, und aus demselben Grunde wird die Klasse $(\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\alpha})$ zu $(\mathfrak{q})$.

Nach Nr. 3 gibt es eine ganze Zahl α_0, so daß

$$\omega_{\mathfrak{L}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\alpha}) = \omega_{\mathfrak{C}_3}(\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\alpha}) = 0 \quad \text{für} \quad \alpha \geqq \alpha_0.$$

Sind also $\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_2, \ldots, \mathfrak{g}_r$ ganze Divisoren der Klasse $(\mathfrak{q})$, von denen alle ganzen Divisoren dieser Klasse linear abhängen, so gibt es für $\alpha \geqq \alpha_0$ in der Klasse $(\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\alpha})$ ganze Divisoren $\mathfrak{G}_1, \mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_r$, so daß $\mathfrak{G}_k$ für $\mathfrak{L} = 0$ in $\mathfrak{g}_k$ übergeht. Dann geht der ganze Divisor $\mathfrak{G}_k\mathfrak{B}^{\alpha}$, der der Klasse $(\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{B}^{\alpha}) = (\mathfrak{Q}\mathfrak{C}^{\alpha})$ angehört, in $\mathfrak{g}_k\mathfrak{c}_0^{\alpha}$ über. Das gilt für jeden Wert der Konstanten ξ in (62).

Es seien jetzt $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{\alpha}$ α verschiedene Konstanten und es sei $\mathfrak{c}_1 + \xi_k\mathfrak{c}_2 = \mathfrak{a}_k$ gesetzt. Dann gibt es nach dem eben Bewiesenen in der Klasse $(\mathfrak{Q}\mathfrak{C}^{\alpha})$ ganze Divisoren, die für $\mathfrak{C}_3 = 0$ in die Divisoren

$$\mathfrak{a}_1^{\alpha}\mathfrak{g}_k, \ \mathfrak{a}_2^{\alpha}\mathfrak{g}_k, \ldots, \mathfrak{a}_{\alpha}^{\alpha}\mathfrak{g}_k, \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

übergehen. Nach 2., Nr. 5 hängen aber die ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{q}\mathfrak{c}^{\alpha})$, in die $(\mathfrak{Q}\mathfrak{C}^{\alpha})$ für $\mathfrak{C}_3 = 0$ übergeht, von diesen Divisoren linear ab. Es ist also, wie behauptet, $\omega_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{C}^{\alpha}) = 0$ für $\alpha \geqq \alpha_0$.

3. Wir setzen in (18), Nr. 4 $\mathfrak{P} = \mathfrak{C}$ und $\mathfrak{T} = \mathfrak{Q}\mathfrak{C}^{\alpha_0}$, also $\mathfrak{T}' = \mathfrak{Q}'\mathfrak{C}^{-\alpha_0}$. Dabei soll α so groß gewählt sein, daß erstens (61) gilt und daß zweitens

$$(\mathfrak{T}', \mathfrak{C}) < 0, \quad \text{also} \quad \omega_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{T}'\mathfrak{C}^{1-k}) = 0 \text{ für } k > 0. \tag{64}$$

[4]) § 7.

Dann folgt

$$[\mathfrak{Q}\mathfrak{C}^{\alpha_0+\lambda}] = [\mathfrak{Q}\mathfrak{C}^{\alpha_0}]$$

und wir haben den Satz:

Ist $(\mathfrak{C})$ *eine Klasse, deren Dimension mindestens gleich* 3 *ist, und haben die ganzen Divisoren von* $(\mathfrak{C})$ *keinen gemeinsamen Teiler und keine gemeinsamen Schnittpunkte, ist ferner* $(\mathfrak{Q})$ *irgendeine Klasse, so gibt es eine ganze Zahl* α_0, *so daß*

$$[\mathfrak{Q}\mathfrak{C}^{\alpha}] = [\mathfrak{Q}\mathfrak{C}^{\alpha_0}] \quad \textit{für} \quad \alpha \geqq \alpha_0. \tag{65}$$

4. Die ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{C})$ haben bei unseren Annahmen i. a. keine mehrfachen Faktoren und keine mehrfachen Stellen. Denn eine lineare Divisorenschar kann nur feste mehrfache Stellen haben und wir haben vorausgesetzt, daß die ganzen Divisoren von $(\mathfrak{C})$ keine festen Stellen haben. Es kann aber in $(\mathfrak{C})$ einen besonderen ganzen Divisor $\mathfrak{C}_0$ geben, der keine mehrfachen Faktoren hat, aber mehrfache Stellen. Der Divisor dieser mehrfachen Stellen sei $\mathfrak{d}$ und seine Ordnung 2σ. Dann gilt der Satz:

Ist $(\mathfrak{Q})$ *irgendeine Klasse, so gibt es eine ganze Zahl* α_0, *so daß*

$$\omega'_{\mathfrak{C}_0}(\mathfrak{Q}\mathfrak{C}^{\alpha}) = \sigma \quad \textit{für} \quad \alpha \geqq \alpha_0. \tag{66}$$

Hierbei ist der Defekt natürlich genau in bezug auf $\mathfrak{C}_0$ gemeint, woran durch den Akzent an ω erinnert sei. Man vergleiche die allgemeine Definition des Defektes in A, I, Nr. 10.

Wir bestimmen zunächst, welche Änderung die Formel (37), A, I, Nr. 11, nämlich

$$[\mathfrak{Q}\mathfrak{P}] = [\mathfrak{Q}] - \omega_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{P}) + \omega_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{Q}') \tag{67}$$

erleidet, wenn $\mathfrak{P}$ einen Divisor $\mathfrak{d}$ mehrfacher Stellen der Ordnung 2σ hat. Erstens besteht jetzt statt (32) für das Geschlecht π von $\mathfrak{P}$ die Gleichung

$$2\pi - 2 = (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}\mathfrak{R}) - 2\sigma.$$

Dann sind jetzt nicht die Klassen $(\mathfrak{q}\mathfrak{p})$ und $(\mathfrak{q}')$ Ergänzungsklassen, sondern z. B. $(\mathfrak{q}\mathfrak{p})$ und $(\mathfrak{q}'/\mathfrak{d})$. Wir bezeichnen die Zahl der linear unabhängigen Bedingungen dafür, daß ein ganzer Divisor aus $(\mathfrak{q}')$ durch $\mathfrak{d}$ teilbar wird, mit $\delta(\mathfrak{Q}')$, so daß

$$\{\mathfrak{q}'/\mathfrak{d}\} = \{\mathfrak{q}'\} - \delta(\mathfrak{Q}').$$

Wenn $\{\mathfrak{q}'\} = 0$ und also erst recht $\{\mathfrak{q}'/\mathfrak{d}\} = 0$, so ist auch $\delta(\mathfrak{Q}') = 0$. Statt (33), A, I, Nr. 11 haben wir

$$\{\mathfrak{q}\mathfrak{p}\} - \{\mathfrak{q}'/\mathfrak{d}\} = (\mathfrak{Q}\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) - (\pi - 1) = (\mathfrak{Q}, \mathfrak{P}) + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) - \tfrac{1}{2}(\mathfrak{P}, \mathfrak{R}) + \sigma.$$

Die Gleichungen (34), (35), A, I, Nr. 11 bleiben richtig und wir erhalten aus ihnen durch Addition wegen der angegebenen Änderungen statt (67), wenn wir noch $\mathfrak{T}$ statt $\mathfrak{Q}$ schreiben,

$$[\mathfrak{T}\mathfrak{P}] = [\mathfrak{T}] - \omega'_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{T}\mathfrak{P}) + \omega'_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{T}') + \sigma - \delta(\mathfrak{T}'). \tag{68}$$

In dieser Formel setzen wir $\mathfrak{P} = \mathfrak{C}_0$ und $\mathfrak{T} = \mathfrak{Q}\mathfrak{C}^{\alpha}$, also $\mathfrak{T}' = \mathfrak{Q}'\mathfrak{C}^{-\alpha}$ und wählen α so groß, daß (61), (64) und (65) gilt. Es ist dann $\delta(\mathfrak{T}') = 0$ und

$$[\mathfrak{T}\mathfrak{C}_0] = [\mathfrak{T}\mathfrak{C}] = [\mathfrak{T}] = [\mathfrak{Q}\mathfrak{C}^{\alpha_0}],$$

so daß aus (68) die Behauptung (66) folgt.

Der damit bewiesene Satz sagt aus, daß es für genügend großes α unter den ganzen Divisoren derjenigen Klasse, in die $(\mathfrak{Q}\mathfrak{C}^{\alpha})$ für $\mathfrak{C}_0 = 0$ übergeht, genau σ linear unabhängige gibt, die nicht aus ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{Q}\mathfrak{C}^{\alpha})$ hervorgehen. Es ist das eine Verallgemeinerung eines bekannten Satzes aus der Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen. Es sei nämlich $\mathfrak{R}$ der Körper der rationalen Funktionen von x, y. Es sei $\mathfrak{C}_0 \sim \mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\mu}$, es sei also $\mathfrak{C}_0$ durch eine Gleichung $C_0(x, y) = 0$ vom Grade (λ, μ) in x, y definiert Ferner sei $\mathfrak{Q} = 1$ Dann sagt unser Satz aus: Unter den ganzen Funktionen von genügend hoher Ordnung des Körpers $\mathfrak{C}_0$ gibt es genau σ linear unabhängige, die sich nicht als ganze rationale Funktionen von x, y darstellen lassen.

5. Wir beweisen noch folgenden Satz:

Es sei $\mathfrak{P}$ ein Primteiler vom Geschlechte ϱ. Der Divisor seiner mehrfachen Stellen sei $\mathfrak{d}$ und die Ordnung von $\mathfrak{d}$ sei 2σ. Ferner sei $(\mathfrak{T})$ eine Divisorenklasse aus K und die Zahl $(\mathfrak{T}, \mathfrak{P})$ der Schnittpunkte von $\mathfrak{T}$ mit $\mathfrak{P}$, die zur Abkürzung mit ν bezeichnet sei, genüge der Bedingung $(\mathfrak{T}, \mathfrak{P}) > (\mathfrak{P}, \mathfrak{P}\mathfrak{R})$ oder

$$\nu > 2(\varrho + \sigma - 1).$$

Dann ist

$$[\mathfrak{T}] \leqq [\mathfrak{T}/\mathfrak{P}], \quad \omega'_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{T}) \geqq \sigma. \tag{69}$$

Wir setzen

$$B = \{\mathfrak{T}\} - \{\mathfrak{T}/\mathfrak{P}\}$$

und beweisen zunächst, daß

$$B \leqq \nu - (\varrho + \sigma - 1).$$

Es ist B die Zahl der linear unabhängigen Bedingungen dafür, daß ein ganzer Divisor aus $(\mathfrak{T})$ durch $\mathfrak{P}$ teilbar ist. Wir können annehmen, daß $\{\mathfrak{T}\} > \varrho + \sigma$ ist. Ist nämlich $\{\mathfrak{T}\} \leqq \varrho + \sigma$, so folgt aus der Definition von B und wegen der Bedingung, der ν genügen soll,

$$B \leqq \{\mathfrak{T}\} \leqq \varrho + \sigma \leqq \nu - (\varrho + \sigma - 1),$$

also die Behauptung.

Es sei also $\{\mathfrak{T}\} > \varrho + \sigma$. Die Zahl der Bedingungen dafür, daß ein ganzer Divisor, aus $(\mathfrak{T})$ durch $\mathfrak{d}$ teilbar ist, d. h. daß er für $\mathfrak{P} = 0$ in einen durch $\mathfrak{d}$ teilbaren Divisor von des Körpers $\mathfrak{P}$ übergeht ist höchstens σ. (Vgl. unten III, Nr. 5. Dort handelt es sich zwar um ganze rationale Funktionen von x, y und hier um gewöhnliche Potenzreihen der jedesmaligen Ortsuniformisierenden u, v, was aber keinen wesentlichen Unterschied macht.) Es sei ferner $\mathfrak{a}_0$ ein ganzer Divisor von $\mathfrak{P}$ der Ordnung ϱ, der nicht speziell ist, so daß die Dimension $\{\mathfrak{a}_0\}$ der Klasse $(\mathfrak{a}_0)$ gleich 1 ist. Die Zahl der Bedingungen, daß ein ganzer Divisor aus $(\mathfrak{T})$ durch $\mathfrak{a}_0\mathfrak{d}$ teilbar ist, ist höchstens $\varrho + \sigma$. Da $\{\mathfrak{T}\} > \varrho + \sigma$, so gibt es mindestens einen derartigen Divisor $\mathfrak{T}_0$. Sollten alle diese Divisoren durch $\mathfrak{P}$ teilbar sein, so ist $B \leqq \varrho + \sigma$ und daraus folgt wie oben, daß die über B gemachte Behauptung richtig ist. Es sei also $\mathfrak{T}_0$ nicht identisch Null für $\mathfrak{P} = 0$, sondern es gehe über in den Divisor $\mathfrak{t}_0 = \mathfrak{a}_0\mathfrak{d}\mathfrak{g}_0$. Der ganze Divisor $\mathfrak{g}_0$ ist von der Ordnung $g = \nu - (\varrho + 2\sigma)$.

Es sei jetzt $\mathfrak{T}^*$ ein ganzer Divisor aus $(\mathfrak{T})$, der durch $\mathfrak{d}\mathfrak{g}_0$ teilbar ist. Für $\mathfrak{P} = 0$ gehe er in $\mathfrak{t}^* = \mathfrak{a}\mathfrak{d}\mathfrak{g}_0$ über. Dann ist $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{a}_0$, also $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_0$, da $\{\mathfrak{a}_0\} = 1$. Es ist daher $\mathfrak{t} = \mathfrak{t}_0$ und, wenn λ eine passend gewählte Konstante ist, so ist $\mathfrak{T}^* - \lambda\mathfrak{T}_0$ für $\mathfrak{P} = 0$ identisch Null, d. h. durch $\mathfrak{P}$ teilbar. Also ist jeder durch $\mathfrak{d}\mathfrak{g}_0$ teilbare ganze Divisor $\mathfrak{T}^*$ aus $(\mathfrak{T})$ von der Form

$$\mathfrak{T}^* = \lambda\mathfrak{T}_0 + \mathfrak{P}\mathfrak{G},$$

wo $\mathfrak{G}$ ein ganzer Divisor ist und λ eine Konstante. Ist jetzt $\mathfrak{p}$ ein Primteiler von $\mathfrak{P}$, der nicht in $\mathfrak{a}_0\mathfrak{d}\mathfrak{g}_0$ enthalten ist, und soll $\mathfrak{T}^*$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein, so ergibt sich $\lambda = 0$, so daß $\mathfrak{T}^*$ durch $\mathfrak{P}$ teilbar wird. Es sind daher alle ganzen Divisoren aus $(\mathfrak{T})$, die $\mathfrak{d}\mathfrak{g}_0\mathfrak{p}$ enthalten, durch $\mathfrak{P}$ teilbar. Die Zahl der dazu notwendigen Bedingungen ist höchstens $\sigma + g + 1$. Daher ist

$$B \leqq \sigma + g + 1 = \nu - (\varrho + \sigma - 1)$$

und das ist die Behauptung.

Es sei $(\mathfrak{T}') = (\mathfrak{R}/\mathfrak{T})$ die Ergänzungsklasse von $(\mathfrak{T})$. Es ist wegen der Voraussetzung über ν

$$(\mathfrak{T}'\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) = (\mathfrak{R}\mathfrak{P}, \mathfrak{P}) - (\mathfrak{T}, \mathfrak{P}) = 2\varrho + 2\sigma - 2 - \nu < 0.$$

Daher ist die Ordnung der Klasse, in die $(\mathfrak{T}'\mathfrak{P})$ für $\mathfrak{P} = 0$ übergeht, negativ und diese Klasse kann keinen ganzen Divisor enthalten, so daß

$$\omega'_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{T}'\mathfrak{P}) = \delta(\mathfrak{T}'\mathfrak{P}) = 0.$$

Aus (68) folgt also, wenn wir $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{T}/\mathfrak{P}$ ersetzen,

$$[\mathfrak{T}/\mathfrak{P}] - [\mathfrak{T}] = \omega'_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{T}) - \sigma.$$

Andrerseits ergibt sich aus der Definition der Symbole $[\mathfrak{T}]$ und $[\mathfrak{T}/\mathfrak{P}]$, (I, Nr. 4),

$$[\mathfrak{T}/\mathfrak{P}] - [\mathfrak{T}] = \nu - (\varrho + \sigma - 1) - B + \{\mathfrak{T}'\mathfrak{P}\} - \{\mathfrak{T}'\}.$$

Da aber $\{\mathfrak{T}'\mathfrak{P}\} \geqq \{\mathfrak{T}'\}$, so folgt hieraus und aus der vorhergehenden Gleichung unter Benutzung der für B bewiesenen Ungleichheit die Behauptung (69).

Ersetzen wir $\mathfrak{T}$ durch $\mathfrak{T}\mathfrak{P}$, so können wir den gefundenen Satz auch in der Form aussprechen:

Es sei $(\mathfrak{T})$ *eine Divisorenklasse und* $(\mathfrak{T}')$ *ihre Ergänzungsklasse. Ferner sei* $\mathfrak{P}$ *ein Primteiler, dessen Divisor der mehrfachen Punkte die Ordnung* 2σ *hat. Ist* $(\mathfrak{T}', \mathfrak{P}) < 0$, *so ist*

$$[\mathfrak{T}\mathfrak{P}] \leqq [\mathfrak{T}], \qquad \omega'_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{T}\mathfrak{P}) \geqq \sigma.$$

II. Die adjungierten Klassen $(\mathfrak{K}\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\mu})$.

1. *Die Punktprimteiler.*

Ist $\mathfrak{V}_k$ ein Punktprimteiler, so werden für $\mathfrak{V}_k = 0$ x und y beide konstant oder, was dasselbe ist, es ist

$$(\mathfrak{L}, \mathfrak{V}_k) = (\mathfrak{M}, \mathfrak{V}_k) = 0$$

und umgekehrt ist $\mathfrak{V}_k$ ein Punktprimteiler, wenn diese Gleichungen bestehen. Sind a, b die konstanten Werte von x, y für $\mathfrak{V}_k = 0$, so haben wir (a, b) die Projektion von $\mathfrak{V}_k$ genannt. Es seien hier Eigenschaften dieser Primteiler angegeben, die später Verwendung finden.

1. Es hat $\mathfrak{V}_k$ keine mehrfachen Stellen. Auf jeden Fall kann man immer erreichen, daß das der Fall ist, indem man etwa vorhandene derartige Stellen nach dem Noetherschen Verfahren auflöst. Das Geschlecht $\pi(\mathfrak{V}_k)$ von $\mathfrak{V}_k$ ist also gegeben durch

$$2\pi(\mathfrak{V}_k) - 2 = (\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}_k\mathfrak{K}). \tag{70}$$

2. Wir setzen

$$(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}_i) = -v_{ki} = -v_{ik}. \tag{71}$$

Es ist dann

$$v_{ki} \leqq 0 \quad \text{für} \quad k \neq i, \quad v_{kk} > 0. \tag{72}$$

Die erste dieser Ungleichheiten ist klar, auf die zweite kommen wir noch zurück.

3. Sind $\mathfrak{V}_k$ und $\mathfrak{V}_i$ zwei Punktprimteiler mit verschiedenen Projektionen, so ist immer $v_{ki} = 0$. Denn an einer Schnittstelle von $\mathfrak{V}_k$ und $\mathfrak{V}_i$ müßte ja x (oder y) gleichzeitig zwei verschiedene Werte haben. Aber auch das quadratische System (v_{ki}) der Schnittpunktzahlen von allen Punktprimteilern mit derselben Projektion kann noch zerfallen. Wir beschränken uns auf die Betrachtung von allen Punktprimteilern, die zu einem der Teilsysteme gehören. Wir nennen sie ein *System von zusammengehörigen Punktprimteilern*. Das System (v_{ki}) ihrer Schnittpunktzahlen bezeichnen wir mit v. Ihre Anzahl sei r. Es zerfällt nicht, was geometrisch bedeutet, daß die r Kurven $\mathfrak{V}_k$ miteinander zusammenhängen.

Die Gesamtheit der Stellen, durch die die r Kurven $\mathfrak{V}_k$ gehen, nennen wir einen Punkt von K, den wir mit V bezeichnen wollen. Geometrisch ist V ein Punkt der Fläche $F(x, y, z) = 0$, wenigstens, wenn die Stellen so definiert sind, daß auch z überall bestimmte Werte annimmt. Die Kurven $\mathfrak{V}_k$ entstehen durch Auflösen des i. a. singulären Punktes V in unendlich viele Punkte oder Stellen höherer Ordnung.

4. Es sei A eine ganze Funktion aus K, die durch den Punkt V geht, so daß der Zähler $\mathfrak{A}$ von A äquivalent ist zu $\mathfrak{L}^\alpha \mathfrak{M}^\beta$. Es ist $\mathfrak{A}$ durch alle r Primteiler $\mathfrak{B}_k$ teilbar. Es sei etwa

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B}_1^{a_1} \mathfrak{B}_2^{a_2} \dots \mathfrak{B}_r^{a_r} \mathfrak{A}' \sim \mathfrak{L}^\alpha \mathfrak{M}^\beta$$

wo $\mathfrak{A}'$ zu den $\mathfrak{B}_k$ teilerfremd sein soll. Die Exponenten a_k sind alle positiv. Man kann die Funktion A so wählen, daß der Divisor $\mathfrak{A}'$ nur durch Stellen geht, durch die ein bestimmter Primteiler $\mathfrak{B}_k$ geht. Wir bezeichnen eine solche Funktion mit A_k und ihren Zähler mit $\mathfrak{A}_k$ und es sei

$$\mathfrak{A}_k = \mathfrak{B}_1^{a_{k1}} \mathfrak{B}_2^{a_{k2}} \dots \mathfrak{B}_r^{a_{kr}} \mathfrak{A}_k' \sim \mathfrak{L}^{\alpha_k} \mathfrak{M}^{\beta_k}. \tag{73}$$

Es ist dann

$$a_{ki} > 0, \quad (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{A}_k') = v_k > 0, \quad (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{A}_i') = 0 \text{ für } k \neq i. \tag{74}$$

Wir können dabei die A_k so gewählt annehmen, daß die Zahlen v_k möglichst klein werden.

Aus (73) und (74) folgt durch Zusammensetzen mit $\mathfrak{B}_i$

$$a_{k1} v_{1i} + a_{k2} v_{2i} + \dots + a_{kr} v_{ri} \begin{cases} = v_k & \text{für } k = i, \\ = 0 & \text{für } k \neq i. \end{cases} \tag{75}$$

Bezeichnen wir also mit a das System der Elemente a_{ki} und mit v die Diagonalmatrix mit der Diagonale $v_1, v_2, \dots, v_r$, so ist

$$a v = v. \tag{76}$$

Hieraus folgt noch, daß die Determinante von v von null verschieden ist.

5. Aus den Gleichungen (75) ergibt sich zunächst wegen (74) und, da $v_{ki} \leqq 0$ für $k \neq i$, daß $v_{kk} > 0$ sein muß, wie schon in (72) angegeben. Ferner folgt:

Es sei

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1^{\gamma_1} \mathfrak{B}_2^{\gamma_2} \dots \mathfrak{B}_r^{\gamma_r} \tag{77}$$

irgendein ganzer Punktdivisor, der nicht gleich 1 ist. Dann ist von den r Zahlen $(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B})$ mindestens eine negativ, und wenn etwa $(\mathfrak{B}_\alpha, \mathfrak{B}) < 0$, so ist $\mathfrak{B}_\alpha$ in $\mathfrak{B}$ wirklich enthalten.

Das letzte ist klar. Denn, wenn $\mathfrak{B}_\alpha$ in $\mathfrak{B}$ nicht enthalten ist, so ist $(\mathfrak{B}_\alpha, \mathfrak{B})$ als Zahl der Schnittpunkte zweier teilerfremder ganzer Divisoren gewiß nicht negativ. Um den ersten Teil der Behauptung zu beweisen, setzen wir $(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}) = -v_k$. Aus (77) ergibt sich in Verbindung mit (71) durch Zusammensetzen mit $\mathfrak{B}_k$

$$v_k = v_{k1} \gamma_1 + v_{k2} \gamma_2 + \dots + v_{kr} \gamma_r,$$

woraus wegen (75) umgekehrt folgt

$$v_l \gamma_l = a_{l1} v_1 + a_{l2} v_2 + \dots + a_{lr} v_r.$$

Da aber mindestens ein γ_l positiv ist, da ferner alle v_k und a_{ki} größer als null sind, so folgt, daß nicht alle v_k null oder negativ sein können.

2. *Systeme von ausgezeichneten Primteilern erster Art.*

Unter den zum Punkte V gehörenden Punktprimteilern können ausgezeichnete Primteiler erster Art sein, d. h. Primteiler, die durch birationale Transformation in solche zweiter Art übergeführt werden können, ohne daß dabei Primteiler zweiter Art in solche erster Art verwandelt werden. Es seien etwa $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \dots, \mathfrak{B}_\varrho$ die voneinander verschiedenen ausgezeichneten Primteiler, die unter den zu V gehörenden Punktprimteilern $\mathfrak{B}_k$ enthalten sind. Wir wollen sie eine *Gemeinschaft von zum Punkte V gehörenden Punktprimteilern* nennen. Die Primteiler einer solchen Gemeinschaft haben eine Reihe von Eigenschaften, von denen einige hier der späteren Verwendung wegen angegeben seien[4]).

1. Das Geschlecht jedes $\mathfrak{B}_k$ ist null, so daß

$$(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_k \mathfrak{K}) = -2. \tag{78}$$

[4]) § 9.

2. Setzen wir

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1^{\beta_1} \mathfrak{B}_2^{\beta_2} \dots \mathfrak{B}_\varrho^{\beta_\varrho} \tag{79}$$

und bestimmen die β_i aus den Gleichungen

$$(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{K}), \tag{80}$$

so sind die β_i positive ganze Zahlen und es ist wegen (78)

$$(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_k \mathfrak{B}) = -2. \tag{81}$$

Wir nennen $\mathfrak{B}$ den *kanonischen Divisor* der Gemeinschaft.

3. Von den Zahlen $b_{ki} = -(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_i)$, die ja zu den Zahlen v_{ki} gehören, gilt nach Nr. 1

$$b_{kk} > 0, \; b_{ki} = b_{ik} \leqq 0 \quad \text{für} \quad k \neq i.$$

4. Von den Zahlen b_{kk} ist mindestens eine gleich 1.

5. Ist etwa $b_{\varrho\varrho} = 1$, so sind die Zahlen $b_{\varrho k}$ gleich 0 oder -1.

6. Wir bezeichnen die Matrix der ϱ^2 Elemente b_{ki} mit b. Wir addieren die letzte Zeile und Spalte von b zu denjenigen Parallelreihen, deren letztes Element -1 ist, und erhalten eine Matrix, die in der letzten Zeile und Spalte bis auf die 1 an letzter Stelle nur Nullen enthält. Die Matrix, die hieraus durch Fortlassen der letzten Zeile und Spalte entsteht, sei mit b' bezeichnet und ihre Elemente seien b'_{ki}. Es hat dann b' wieder die Eigenschaften 3., 4. und 5. Ist etwa $b'_{\varrho-1,\varrho-1}$ gleich 1, so addieren wir wieder die letzte Zeile und Spalte von b' zu denjenigen Parallelreihen, deren letztes Element -1 ist. Indem wir die letzte Zeile und Spalte fortlassen, erhalten wir ein System b'', das wieder die Eigenschaften 3. 4., und 5. hat. In dieser Weise können wir fortfahren, bis wir zu dem aus dem einen Element 1 bestehenden System kommen.

Aus den angegebenen Eigenschaften folgen alle anderen, die ein System von zusammengehörigen ausgezeichneten Primteilern erster Art, hat wie z. B., daß von den Zahlen b_{ki} mit $k < i$ genau $\varrho - 1$ gleich -1 sind und die anderen 0, oder genauer, daß zwei Primteiler $\mathfrak{B}_k$, $\mathfrak{B}_i$, die beide einen dritten treffen, einander nicht schneiden, daß die Determinante von b den Wert 1 hat und daß die Elemente des zu b reziproken Systems positive ganze Zahlen sind. Erfüllen umgekehrt Primteiler die Bedingungen 1. bis 5., so bilden sie ein System von ausgezeichneten Primteilern erster Art, auch, wenn es sich nicht wie hier um Punktprimteiler handelt. (F. Buschmann, Die Transformation einer Gruppe ausgezeichneter Kurven erster Art in einen gewöhnlichen Punkt. Dieses Journal, Bd. 156 S. 43–54 (1926)).

3. *Ein Satz über* $\tau(\mathfrak{Q})$, *im besonderen über* $\tau(\mathfrak{K})$.

1. Es sei $\mathfrak{A}$ ein ganzer Divisor, der der Bedingung genügt

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{L}^\lambda \mathfrak{M}^\mu, \tag{83}$$

wo λ und μ genügend groß gewählte ganze positive Zahlen sein sollen. Ist $\mathfrak{Q}$ irgendein Divisor und ebenso $\mathfrak{P}$, so ist nach Nr. 7

$$\tau(\mathfrak{Q}) = [\mathfrak{Q}\mathfrak{A}], \quad \tau(\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1}) = [\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1}\mathfrak{A}]. \tag{84}$$

Es sei $\mathfrak{P}$ ein Kurvenprimteiler, so daß $(\mathfrak{P}, \mathfrak{A}) > 0$. Setzen wir $\mathfrak{T} = \mathfrak{Q}\mathfrak{A}$, so erfüllen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{P}$ bei genügend großem λ und μ die Voraussetzungen von (69), so daß wegen (84)

$$\tau(\mathfrak{Q}) \leqq \tau(\mathfrak{Q}\mathfrak{P}^{-1}). \tag{85}$$

Da wir diesen Schluß wiederholt anwenden können, so haben wir:

Ist $\mathfrak{G}$ *ein ganzer Divisor ohne Punktprimteiler, so ist für jede Klasse* $(\mathfrak{Q})$

$$\tau(\mathfrak{Q}) \leqq \tau(\mathfrak{Q}/\mathfrak{G}). \tag{86}$$

2. Wenn $\mathfrak{P}$ Punktprimteiler ist, so ist $(\mathfrak{P}, \mathfrak{A}) = 0$ und wir können nicht mehr in derselben Weise schließen. Wir beschränken uns auf den Fall, wo $\mathfrak{Q} = \mathfrak{K}$, also $\mathfrak{Q}' = 1$

ist. Es sei $\mathfrak{V}^0$ ein ganzer Punktdivisor. Nach II, Nr. 1 gibt es in $\mathfrak{V}^0$ einen Primteiler $\mathfrak{V}_1$, so daß $(\mathfrak{V}_1\,\mathfrak{V}^0) < 0$. Wir setzen $\mathfrak{V}^0 = \mathfrak{V}_1\,\mathfrak{V}^1$. Dann gibt es in $\mathfrak{V}^1$ einen Primteiler $\mathfrak{V}_2$, so daß $(\mathfrak{V}_2, \mathfrak{V}^1) < 0$. In dieser Weise können wir fortfahren, bis alle Primteiler von $\mathfrak{V}^0$ verbraucht sind. Wir haben dann

$$\mathfrak{V}^0 = \mathfrak{V}_1\,\mathfrak{V}^1,\ \mathfrak{V}^1 = \mathfrak{V}_2\,\mathfrak{V}^2, \ldots, \mathfrak{V}^{\nu-1} = \mathfrak{V}_\nu\,\mathfrak{V}^\nu,\ \mathfrak{V}^\nu = 1, \tag{87}$$

$$(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}^{k-1}) < 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, \nu. \tag{88}$$

Wir setzen zur Abkürzung

$$(\mathfrak{K}\mathfrak{A}/\mathfrak{V}^k) = (\mathfrak{G}_k),\ \{\mathfrak{G}_k\} - \{\mathfrak{G}_{k-1}\} = B_k, \tag{89}$$

$$(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}_k\,\mathfrak{K}) = 2\pi_k - 2,\ (\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}^{k-1}) = -1 - \delta_k, \tag{90}$$

$$\omega_k = \omega_{\mathfrak{V}_k}(\mathfrak{G}_k) = \omega_{\mathfrak{V}_k}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}/\mathfrak{V}^k) = \omega_{\mathfrak{V}_k}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}\mathfrak{V}_k/\mathfrak{V}^{k-1}). \tag{91}$$

Es ist also B_k die Zahl der linear unabhängigen Bedingungen dafür, daß ein ganzer Divisor der Klasse $(\mathfrak{G}_k)$ durch $\mathfrak{V}_k$ teilbar wird. Ferner ist π_k das Geschlecht von $\mathfrak{V}_k$ und schließlich ist wegen (88)

$$\delta_k \geqq 0. \tag{92}$$

Zufolge der Definition des Symbols $[\mathfrak{T}]$ ist

$$[\mathfrak{G}_{k-1}] = \{\mathfrak{G}_{k-1}\} - \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{G}_{k-1}, \mathfrak{G}_{k-1}\,\mathfrak{K}^{-1}), \tag{93}$$

$$[\mathfrak{G}_k] = \{\mathfrak{G}_k\} - \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{G}_k, \mathfrak{G}_k\,\mathfrak{K}^{-1}). \tag{94}$$

Da aber $(\mathfrak{G}_k) = (\mathfrak{V}_k\,\mathfrak{G}_{k-1})$, so ist

$$\begin{aligned}(\mathfrak{G}_k, \mathfrak{G}_k\,\mathfrak{K}^{-1}) &= (\mathfrak{V}_k\,\mathfrak{G}_{k-1}, \mathfrak{V}_k\,\mathfrak{G}_{k-1}\,\mathfrak{K}^{-1}) \\ &= (\mathfrak{G}_{k-1}, \mathfrak{G}_{k-1}\,\mathfrak{K}^{-1}) + 2(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{G}_{k-1}) + (\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}_k) - (\mathfrak{V}_k, \mathfrak{K})\end{aligned}$$

Unter Benutzung von (89), (90) und, weil $(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{A}) = 0$, folgt

$$(\mathfrak{G}_k, \mathfrak{G}_k\,\mathfrak{K}^{-1}) = (\mathfrak{G}_{k-1}, \mathfrak{G}_{k-1}\,\mathfrak{K}^{-1}) + 2(\pi_k + \delta_k).$$

Aus (93), (94) folgt daher durch Substraktion, wenn wir noch die Bezeichnung (84) anwenden,

$$\tau(\mathfrak{K}/\mathfrak{V}^{k-1}) - \tau(\mathfrak{K}/\mathfrak{V}^k) = \pi_k + \delta_k - B_k. \tag{95}$$

Wir setzen in (67) $\mathfrak{Q} = \mathfrak{K}\mathfrak{A}/\mathfrak{V}^{k-1}$, $\mathfrak{Q}' = \mathfrak{V}^{k-1}/\mathfrak{A}$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{V}_k$. Es wird

$$(\mathfrak{Q}', \mathfrak{P}) = (\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}^{k-1}) < 0, \quad \text{also} \quad \omega_{\mathfrak{P}}(\mathfrak{Q}') = 0$$

und wegen (84) und (91) folgt

$$\tau(\mathfrak{K}/\mathfrak{V}^{k-1}) - \tau(\mathfrak{K}/\mathfrak{V}^k) = \omega_k. \tag{96}$$

Durch Vergleich von (95) mit (96) ergibt sich

$$\omega_k = \pi_k + \delta_k - B_k. \tag{97}$$

Wir setzen

$$\sum_{k=1}^{\nu} B_k = \{\mathfrak{G}\} - \{\mathfrak{G}_0\} = \{\mathfrak{K}\mathfrak{A}\} - \{\mathfrak{K}\mathfrak{A}/\mathfrak{V}^0\} = B(\mathfrak{K}\mathfrak{A}/\mathfrak{V}^0), \tag{98}$$

so daß $B(\mathfrak{K}\mathfrak{A}/\mathfrak{V}^0)$ gleich der Zahl der linear unabhängigen Bedingungen dafür ist, daß ein ganzer Divisor der Klasse $(\mathfrak{K}\mathfrak{A})$ durch $\mathfrak{V}^0$ teilbar ist. Aus (87) und (90) folgt ferner

$$\sum_{k=1}^{\nu} (\pi_k + \delta_k) = \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{V}^0, \mathfrak{K}) - \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{V}^0, \mathfrak{V}^0) = \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{V}^0, \mathfrak{K}^0), \tag{99}$$

wenn wir die Klasse $(\mathfrak{K}^0)$ durch diese Gleichung definieren.

Aus (95), (96) ergibt sich durch Summation über k in Verbindung mit (98), (99)

$$\tau(\mathfrak{K}/\mathfrak{V}^0) - \tau(\mathfrak{K}) = \sum_{k=1}^{\nu} \omega_k = \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{V}^0, \mathfrak{K}/\mathfrak{V}^0) - B(\mathfrak{K}\mathfrak{A}/\mathfrak{V}^0). \tag{100}$$

Da die Defekte ω_k nicht negativ sein können, so folgt:

Ist $\mathfrak{V}^0$ irgendein ganzer Punktdivisor, so ist

(101) $$\tau(\mathfrak{K}) \leqq \tau(\mathfrak{K}/\mathfrak{V}^0).$$

3. Es sei A_0 eine ganze Funktion vom Grade λ_0, μ_0 des Körpers K. Es sei also der Zähler $\mathfrak{A}_0$ von A_0 äquivalent zu $\mathfrak{L}^{\lambda_0}\mathfrak{M}^{\mu_0}$. Es soll A_0 im Punkte V, zu dem die Punktprimteiler $\mathfrak{V}_k$ gehören, verschwinden. Dann hat $\mathfrak{A}_0$ alle $\mathfrak{V}_k$ als Faktor. Wir setzen

(102) $$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{V}^0\,\mathfrak{G},$$

wo $\mathfrak{V}^0$ die in $\mathfrak{A}_0$ enthaltenen Punktprimteiler in sich vereinigen soll, während $\mathfrak{G}$ keine Punktprimteiler enthält. Der Punktdivisor $\mathfrak{V}^0$ ist natürlich nicht eindeutig bestimmt. Man kann z. B. erreichen, daß $\mathfrak{V}^0$ die Primteiler $\mathfrak{V}_k$ in beliebig hoher Potenz enthält, indem man A_0 in V von genügend hoher Ordnung verschwinden läßt. Wir wollen einen solchen Punktdivisor *Teiler einer ganzen Funktion* nennen.

Das Symbol $\tau(\mathfrak{Q})$ hat seiner Definition nach (vgl. I, Nr. 7) die Eigenschaft, daß es ungeändert bleibt, wenn man $\mathfrak{Q}$ durch einen äquivalenten Divisor ersetzt oder durch $\mathfrak{Q}\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\mu}$, z. B. durch $\mathfrak{Q}\mathfrak{A}_0$. In Verbindung mit den beiden in dieser Nr. über das Symbol bewiesenen Sätzen ergibt sich

$$\tau(\mathfrak{K}) \leqq \tau(\mathfrak{K}/\mathfrak{V}^0) = \tau(\mathfrak{K}\mathfrak{A}_0/\mathfrak{V}^0) = \tau(\mathfrak{K}\mathfrak{G}) \leqq \tau(\mathfrak{K}),$$

woraus wir schließen:

Ist $\mathfrak{V}^0$ ein Punktdivisor, und zwar Teiler einer ganzen Funktion, so ist

(103) $$\tau(\mathfrak{K}/\mathfrak{V}^0) = \tau(\mathfrak{K}) = p_a + 1.$$

Wir wenden die unter 2. bewiesenen Formeln auf den Fall an, wo $\mathfrak{V}^0$ Teiler einer ganzen Funktion ist, wo also (103) gilt. Zunächst ergibt sich aus (100), da kein ω_k negativ ist,

(104) $$\omega_k = \omega_{\mathfrak{V}_k}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}/\mathfrak{V}^k) = 0.$$

Ferner folgt aus (100)

(105) $$B(\mathfrak{K}\mathfrak{A}/\mathfrak{V}^0) = \tfrac{1}{2}\,(\mathfrak{V}^0,\ \mathfrak{K}/\mathfrak{V}^0)$$

und aus (96) und (97)

(106) $$\tau(\mathfrak{K}/\mathfrak{V}^{k-1}) = \tau(\mathfrak{K}/\mathfrak{V}^k),$$

(107) $$B_k = \pi_k + \delta_k.$$

4. *Die adjungierten Klassen.*

Die Klassen $(\mathfrak{K}\mathfrak{L}^{\varrho}\mathfrak{M}^{\sigma})$ wollen wir *adjungierte Klassen* nennen. Ist $\mathfrak{A}$ wieder ein Primteiler der Klasse $(\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\mu})$, so sind danach auch alle Klassen $(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha})$ adjungierte Klassen. Es kann sein, daß die ganzen Divisoren dieser Klassen einen gemeinsamen Faktor haben, den wir mit $\mathfrak{V}_0$ bezeichnen. Wir setzen

(108) $$(\mathfrak{K}) = \mathfrak{V}_0(\mathfrak{K}_0).$$

Es ist

(109) $$\{\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha}\} = \{\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha}/\mathfrak{V}_0\} = \{\mathfrak{K}_0\,\mathfrak{A}^{\alpha}\}$$

und, wenn umgekehrt diese Gleichung besteht, so ist die Klasse $(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha})$ imprimitiv und hat den Faktor $\mathfrak{V}_0$.

Wir wählen λ, μ so groß, daß die Klassen $(\mathfrak{K}_0\mathfrak{A}^{\alpha})$ für $\alpha > 0$ primitiv sind und einen Primteiler enthalten, der mit $\mathfrak{H}_{\alpha}$ bezeichnet sei. Wir können ferner annehmen, daß $\mathfrak{H}_{\alpha}$ keine mehrfachen Stellen hat. Sollten nämlich alle ganzen Divisoren der Klassen $(\mathfrak{K}\mathfrak{L}^{\varrho}\mathfrak{M}^{\sigma})$ mehrfache Stellen haben, so liegen diese fest und wir können sie durch andere Definition der Stellen zum Verschwinden bringen. Ferner seien λ, μ so groß, daß schon

(110) $$[\mathfrak{K}_0\mathfrak{A}] = \tau(\mathfrak{K}_0), \quad [\mathfrak{K}\mathfrak{A}] = \tau(\mathfrak{K}) = p_a + 1.$$

Wir wollen beweisen:

Der gemeinsame Teiler $\mathfrak{V}_0$ aller adjungierten Klassen ist das Produkt aller kanonischen Divisoren, die zu den vorhandenen Gemeinschaften von Punktprimteilern gehören, wenigstens bei passender Wahl der unabhängigen Veränderlichen.

Dazu sind aber einige Vorbereitungen notwendig.

5. *Der Divisor $\mathfrak{V}_0$ enthält nur Punktprimteiler.*

Wir beweisen diese Eigenschaft auf zwei Arten.

Erster Beweis: Es gehe für $\mathfrak{A} = 0$ der Divisor $\mathfrak{V}_0$ in $\mathfrak{v}_0$ über und es mögen die Klassen $(\mathfrak{K}\mathfrak{A})$ und $(\mathfrak{A})$ zu $(\mathfrak{k})$ und $(\mathfrak{a})$ werden, so daß $(\mathfrak{k})$ die kanonische Klasse von $\mathfrak{A}$ ist. Wir wählen α so groß, daß $\omega_{\mathfrak{A}}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha+1}) = 0$. Dann entsteht jeder ganze Divisor der Klasse $(\mathfrak{k}\mathfrak{a}^{\alpha})$ aus einem ganzen Divisor der Klasse $(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha+1})$, hat also den Faktor $\mathfrak{v}_0$. Die Ordnung der Klasse $(\mathfrak{k}\mathfrak{a}^{\alpha})$ ist aber schon für $\alpha = 1$ mindestens gleich dem doppelten Geschlecht des Körpers $\mathfrak{A}$, so daß die Klasse $(\mathfrak{k}\mathfrak{a}^{\alpha})$ für $\alpha \geqq 1$ primitiv ist. Es muß also $\mathfrak{v}_0 = 1$ sein. Da $\mathfrak{V}_0$ ganz ist, so bedeutet das, daß für jeden in $\mathfrak{V}_0$ enthaltenen Primteiler $\mathfrak{P}$ die Zahl $(\mathfrak{P}, \mathfrak{A}) = \lambda(\mathfrak{P}, \mathfrak{L}) + \mu(\mathfrak{P}, \mathfrak{M}) = 0$. Da das für alle genügend großen ganzen Zahlen λ, μ gilt, so ist $(\mathfrak{P}, \mathfrak{L}) = (\mathfrak{P}, \mathfrak{M}) = 0$, was bedeutet, daß $\mathfrak{P}$ Punktprimteiler ist.

Zweiter Beweis: Nach der Definition des Symbols $[\mathfrak{T}]$ ist

$$[\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha}] = \{\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha}\} - \frac{1}{2}(\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha}, \mathfrak{A}^{\alpha}) = \{\mathfrak{K}\mathfrak{A}^{\alpha}\} - \frac{1}{2}(\mathfrak{K}_0\mathfrak{A}^{\alpha}, \mathfrak{A}^{\alpha}) - \frac{\alpha}{2}(\mathfrak{A}, \mathfrak{V}_0),$$

$$[\mathfrak{K}_0\mathfrak{A}^{\alpha}] = \{\mathfrak{K}_0\mathfrak{A}^{\alpha}\} - \frac{1}{2}(\mathfrak{K}_0\mathfrak{A}^{\alpha}, \mathfrak{A}^{\alpha}\mathfrak{V}_0^{-1}) = \{\mathfrak{K}_0\mathfrak{A}^{\alpha}\} - \frac{1}{2}(\mathfrak{K}_0\mathfrak{A}^{\alpha}, \mathfrak{A}^{\alpha}) + \frac{\alpha}{2}(\mathfrak{A}, \mathfrak{V}_0) + \frac{1}{2}(\mathfrak{V}_0, \mathfrak{K}_0).$$

Durch Subtraktion ergibt sich in Verbindung mit (109) und (110)

$$\tau(\mathfrak{K}_0) - \tau(\mathfrak{K}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{V}_0, \mathfrak{K}_0) + \alpha(\mathfrak{A}, \mathfrak{V}_0).$$

Da hier die linke Seite von α unabhängig ist, muß es auch die rechte sein, d. h. es ist $(\mathfrak{A}, \mathfrak{V}_0) = 0$, woraus dann wieder folgt, daß $\mathfrak{V}_0$ ein Punktdivisor ist. Außerdem ergibt sich

(111) $$\tau(\mathfrak{K}_0) - \tau(\mathfrak{K}) = \frac{1}{2}(\mathfrak{V}_0, \mathfrak{K}_0) = \frac{1}{2}(\mathfrak{V}_0, \mathfrak{K}/\mathfrak{V}_0).$$

6. *Man kann annehmen, daß $(\mathfrak{V}_0, \mathfrak{K}_0)$ gleich Null ist.*

Ich vermute, daß für jeden in $\mathfrak{V}_0$ enthaltenen Primteiler $\mathfrak{V}_k$

(112) $$(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{K}) - (\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}_0) = (\mathfrak{V}_k, \mathfrak{K}_0) = 0$$

ist, daß also die ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{K}_0\mathfrak{A})$ diese Primteiler nicht schneiden, kann es aber nicht beweisen. Ich kann nur zeigen, daß die Vermutung bei passender Wahl der unabhängigen Veränderlichen richtig ist.

Es seien $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$, $\mathfrak{H}_3$ drei linear unabhängige ganze Divisoren der Klasse $(\mathfrak{H}) = (\mathfrak{K}_0\mathfrak{A})$. Die Zahl der Schnittpunkte je zweier von ihnen, also der Grad $(\mathfrak{H}, \mathfrak{H})$ der Klasse $(\mathfrak{H})$ sei s. Wir nehmen an, daß die im ganzen $2s$ Schnittpunkte von $\mathfrak{H}_1$ mit $\mathfrak{H}_3$ und von $\mathfrak{H}_2$ mit $\mathfrak{H}_3$ alle voneinander verschieden sind und nicht auf einem der Primteiler $\mathfrak{V}_k$ liegen. Die einen seien mit $T_1, T_2, \ldots T_s$, die andern mit $T_1', T_2', \ldots T_s'$ bezeichnet. Wir führen durch die Gleichungen

(113) $$x' = \mathfrak{H}_1/\mathfrak{H}_3, \quad y' = \mathfrak{H}_2/\mathfrak{H}_3$$

neue unabhängige Veränderliche x', y' ein. Es wird aber x' an den Stellen T_k und y' an den Stellen T_k' unbestimmt. Da bei allen unseren Betrachtungen wesentlich ist, daß die beiden unabhängigenVeränderlichen überall bestimmte Werte haben, so müssen wir die Definition der Stellen T_k und T_k' abändern, indem wir diese Stellen nach der

Noetherschen Methode auflösen. Da es sich um einfache Schnittpunkte von $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_3$ oder von $\mathfrak{H}_2$ und $\mathfrak{H}_3$ handelt, so genügt für jede Stelle eine einfache quadratische Transformation. An jeder der Stellen entsteht aus einem Primteiler zweiter einer erster Art. Die zu den Stellen T_k und T_k' gehörenden seien $\mathfrak{B}_k$ und $\mathfrak{B}_k'$. Es ist dann

(114) $(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_k) = (\mathfrak{B}_k', \mathfrak{B}_k') = -1$, sonst aber $(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_i) = (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_i') = (\mathfrak{B}_k', \mathfrak{B}_i') = 0$.

Wir setzen

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \dots \mathfrak{B}_s, \quad \mathfrak{B}' = \mathfrak{B}_1' \mathfrak{B}_2' \dots \mathfrak{B}_s'.$$

Dann ist $\mathfrak{H}_1$ durch $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{H}_2$ durch $\mathfrak{B}'$ und $\mathfrak{H}_3$ durch $\mathfrak{B}\mathfrak{B}'$ teilbar. Wir setzen

(115) $$\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{B}\mathfrak{L}_0', \quad \mathfrak{H}_2 = \mathfrak{B}'\mathfrak{M}_0', \quad \mathfrak{H}_3 = \mathfrak{B}\mathfrak{L}' = \mathfrak{B}'\mathfrak{M}',$$

so daß nach (113)

(116) $$x' = \mathfrak{L}_0'/\mathfrak{L}', \quad y' = \mathfrak{M}_0'/\mathfrak{M}',$$

und es haben jetzt x' und y' an allen Stellen bestimmte Werte.

Die kanonische Klasse in bezug auf x', y' ist $(\mathfrak{K}') = (\mathfrak{K}\mathfrak{B}\mathfrak{B}')$ und die adjungierten Klassen sind jetzt $(\mathfrak{K}'\mathfrak{L}'^{\varrho}\mathfrak{M}'^{\sigma})$. Ihr gemeinsamer Teiler sei $\mathfrak{V}_0'$. Nach dem in Nr. 5 Bewiesenen kann $\mathfrak{V}_0'$ nur Primteiler enthalten, die Punktprimteiler in bezug auf x', y' sind, die also weder mit $\mathfrak{L}'$ noch mit $\mathfrak{M}'$ einen Schnittpunkt haben. Diese Eigenschaft haben aber, wie wir zeigen wollen, nur diejenigen Primteiler $\mathfrak{V}_k$, die der Bedingung (112) genügen. Wir betrachten die möglichen Fälle der Reihe nach.

1. Es sei $\mathfrak{P}$ ein Primteiler in bezug auf x, y, aber nicht einer der $\mathfrak{V}_k$. Es ist dann $(\mathfrak{P}, \mathfrak{H}) > 0$. Durch die Transformation können von den Schnittpunkten, die $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{H}_1$ hat, höchstens diejenigen verschwinden, die an den Stellen T_k liegen. Ist also $\mathfrak{P}'$ der Primteiler, in den $\mathfrak{P}$ übergeht, so kann nur dann $(\mathfrak{P}', \mathfrak{L}_0') = 0$ sein, wenn $\mathfrak{P}$ den Divisor $\mathfrak{H}_1$ und also auch $\mathfrak{H}_3$ nur in den Stellen T_k trifft. Und ebenso kann $(\mathfrak{P}', \mathfrak{M}_0')$ nur dann Null sein, wenn $\mathfrak{P}$ die Divisoren $\mathfrak{H}_2$ und $\mathfrak{H}_3$ nur in den Stellen T_k' trifft. Das ist aber nicht beides gleichzeitig möglich, so daß $\mathfrak{P}'$ kein Punktprimteiler in bezug auf x', y' sein kann.

2. Da i. a. ein Divisor der Klasse $(\mathfrak{H})$ nicht durch die Stellen T_k geht, z. B. $\mathfrak{H}_2$ nicht, so ist $(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{H}) = 0$ und aus (114) und (115) folgt, daß $(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{L}') = 1$. Ebenso ergibt sich, daß $(\mathfrak{V}_k', \mathfrak{M}') = 1$, so daß weder die $\mathfrak{V}_k$ noch die $\mathfrak{V}_k'$ Punktprimteiler in bezug auf x', y' sind.

3. Da $\mathfrak{V}_k$ nach Annahme weder durch eine der Stellen T_k noch durch eine der Stellen T_i' geht, so bleibt $\mathfrak{V}_k$ bei der Tranformation ungeändert und die Schnittpunkte mit $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$ gehen in solche mit $\mathfrak{L}_0'$ und $\mathfrak{M}_0'$ über. Daher ist $\mathfrak{V}_k$ nach der Transformation dann und nur dann Punktprimteiler, wenn $(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{H}) = (\mathfrak{V}_k, \mathfrak{K}_0) = 0$.

Zusammenfassend können wir sagen: Nach der Transformation ist nur noch ein Teil der früheren wieder Punktprimteiler. Wenn jetzt für jeden in $\mathfrak{V}_0'$ enthaltenen Primteiler $\mathfrak{V}_k$ die Gleichung $(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{K}') = (\mathfrak{V}_k', \mathfrak{V}_0')$ besteht, so haben wir unser Ziel erreicht. Ist das nicht der Fall, so wiederholen wir das Verfahren. Da die Zahl der Punktprimteiler jedesmal verkleinert wird, so müssen wir nach einer endlichen Zahl von Schritten zum Ziel kommen. Wir nehmen daher an, daß die Gleichungen (111) bestehen, aus denen noch durch Summation über die in $\mathfrak{V}_0$ enthaltenen Primteiler folgt

(117) $$(\mathfrak{V}_0, \mathfrak{K}) - (\mathfrak{V}_0, \mathfrak{V}_0) = (\mathfrak{V}_0, \mathfrak{K}_0) = 0.$$

7. *Der Divisor* $\mathfrak{V}_0$.

1. Wir beweisen zunächst: Ist $\mathfrak{V}^0$ ein ganzer Punktdivisor und ist $(\mathfrak{V}^0, \mathfrak{V}^0) = (\mathfrak{V}^0, \mathfrak{K})$, so ist $\mathfrak{V}^0$ Teiler aller adjungierten Klassen, also Teiler von $\mathfrak{V}_0$.

Wegen der Voraussetzung folgt aus (99), Nr. 3, daß alle Zahlen π_k und δ_k, von denen ja keine negativ ist, null sind. Dann ergibt sich aus (100), da $B(\mathfrak{K}\mathfrak{A}/\mathfrak{V}^0)$ und die ω_k nicht negativ sind, daß alle ω_k und auch $B(\mathfrak{K}\mathfrak{A}/\mathfrak{V}^0)$ verschwinden. Das letzte bedeutet aber, daß gar keine Bedingung dafür nötig ist, daß die ganzen Divisoren von $(\mathfrak{K}\mathfrak{A})$ durch $\mathfrak{V}^0$ teilbar sind, und das ist die Behauptung.

2. Es sei $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_\varrho$, eine Gemeinschaft von ausgezeichneten Punktprimteilern erster Art und es sei $\mathfrak{B}$ ihr kanonischer Divisor. Dann bestehen nach (80), Nr. 2 die Gleichungen $(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{K})$, aus denen durch Summation über k folgt: $(\mathfrak{B}, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}, \mathfrak{K})$. Nach dem unter 1. Bewiesenen folgt daraus der erste Teil des Hauptsatzes über den Teiler $\mathfrak{V}_0$ der adjungierten Klassen, nämlich:

Ist $\mathfrak{B}$ der kanonische Divisor einer Gemeinschaft von ausgezeichneten Punktprimteilern erster Art, so ist $\mathfrak{B}$ in dem Teiler $\mathfrak{V}_0$ der adjungierten Klassen enthalten.

3. Wir identifizieren den Divisor $\mathfrak{V}_0$ mit dem in 2., Nr. 3 eingeführten Divisor $\mathfrak{V}^0$ und verwenden die dort benutzten Bezeichnungen. Wegen (117) sind nach dem unter 1. Bewiesenen alle π_k und δ_k gleich Null. Die ν in $\mathfrak{V}^0$ enthaltenen Primteiler $\mathfrak{V}_\alpha$ haben wir in eine Reihenfolge gebracht, die nicht ganz willkürlich ist. Bedeutet nämlich $\mathfrak{V}^{k-1}$ das Produkt aller $\mathfrak{V}_\alpha$ von $\mathfrak{V}_k$ einschließlich bis $\mathfrak{V}_\nu$, so sollte die Zahl $(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}^{k-1})$ negativ sein. Wegen $\delta_k = 0$ werden nach (90) hier alle diese Zahlen gleich -1. Die Reihenfolge der $\mathfrak{V}_\alpha$ ist durch diese Bedingungen nicht vollständig bestimmt. Die umgekehrte Folge erfüllt z. B. dieselben Bedingungen. Bezeichnen wir nämlich das Produkt der ersten k Primteiler $\mathfrak{V}_\alpha$ mit $\mathfrak{V}_*^{k-1}$, so ist wegen (117) und wegen $\pi_k = 0$

$$(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}^{k-1}) + (\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}_*^{k-1}) = (\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}_k \mathfrak{V}^0) = (\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}_k \mathfrak{K}) = -2$$

so daß

$$(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}^{k-1}) = (\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}_*^{k-1}) = -1. \tag{118}$$

Wir zeigen noch, daß zwei aufeinander folgende Primteiler $\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}_{k+1}$ miteinander vertauscht werden dürfen, wenn sie einander nicht schneiden, wenn also $(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}_{k+1}) = 0$. Setzen wir

$$\overline{\mathfrak{V}}_k = \mathfrak{V}_{k+1}, \quad \overline{\mathfrak{V}}_{k+1} = \mathfrak{V}_k, \quad \overline{\mathfrak{V}}^{k-1} = \mathfrak{V}^{k-1}, \quad \overline{\mathfrak{V}}^k = \mathfrak{V}^{k-1}/\mathfrak{V}_k, \tag{119}$$

so müssen für die durch Vertauschen von $\mathfrak{V}_k$ mit $\mathfrak{V}_{k+1}$ entstehende neue Folge die in (119) angegebenen überstrichenen Primteiler und Divisoren statt der nicht überstrichenen eingeführt werden. Im übrigen ändert sich nichts. Wegen $(\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}_{k+1}) = 0$, und da $\mathfrak{V}^{k-1} = \mathfrak{V}_k \mathfrak{V}^k$, ergibt sich aus (119)

$$(\overline{\mathfrak{V}}_k, \overline{\mathfrak{V}}^{k-1}) = (\mathfrak{V}_{k+1}, \mathfrak{V}^k) = -1, \quad (\overline{\mathfrak{V}}_{k+1}, \overline{\mathfrak{V}}^k) = (\mathfrak{V}_k, \mathfrak{V}^{k-1}) = -1$$

und das zeigt, daß die Vertauschung erlaubt ist.

Die ν Primteiler $\mathfrak{V}_k$ sind i. a. nicht voneinander verschieden. Wir bezeichnen die verschiedenen, deren Anzahl ϱ sei, mit $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_\varrho$ und setzen

$$\mathfrak{V}_0 = \mathfrak{V}^0 = \mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1^{\beta_1} \mathfrak{B}_2^{\beta_2} \ldots \mathfrak{B}_\varrho^{\beta_\varrho}. \tag{120}$$

Da nach (87) $\mathfrak{V}^{\nu-1} = \mathfrak{V}_\nu$, so folgt aus (118) für $k = \nu$ unter Verwendung der in Nr. 1 und 2 eingeführten Bezeichnungen

$$v_{\nu\nu} = b_{\varrho\varrho} = 1, \tag{121}$$

wenn wir $\mathfrak{B}_\varrho = \mathfrak{V}_\nu$ wählen. Unter den $\mathfrak{V}_k$ wird i. a. $\mathfrak{B}_\varrho$ mehrmals vorkommen, etwa $(s+1)$-mal. Außer $\mathfrak{V}_\nu$ seien noch $\mathfrak{V}_{\alpha_1}, \mathfrak{V}_{\alpha_2}, \ldots, \mathfrak{V}_{\alpha_s}$ gleich $\mathfrak{B}_\varrho$, wo die α_i mit i wachsen sollen. Zunächst können keine zwei der $\mathfrak{V}_{\alpha_i}$ in $\mathfrak{V}^0$ nebeneinander stehen. Es sei z. B. $\alpha_{i+1} = \alpha_i + 1$. Dann folgt aus (118) für $k = \alpha_i$ und $k = \alpha_i + 1$

$$-1 = (\mathfrak{V}_{\alpha_i}, \mathfrak{V}^{\alpha_i - 1}) = (\mathfrak{V}_{\alpha_i}, \mathfrak{V}_{\alpha_i}) + (\mathfrak{V}_{\alpha_i+1}, \mathfrak{V}^{\alpha_i}) = (\mathfrak{B}_\varrho, \mathfrak{B}_\varrho) - 1,$$

so daß $b_{\varrho\varrho} = -(\mathfrak{B}_\varrho, \mathfrak{B}_\varrho) = 0$ werden würde im Widerspruch zu (121). Die $\mathfrak{V}_{\alpha_i}$ sind also in $\mathfrak{V}^0$ durch andere $\mathfrak{V}_k$ getrennt. Wir zerlegen $\mathfrak{V}^0$ in $s+2$ Faktoren, von denen der erste von $\mathfrak{V}_1$ bis $\mathfrak{V}_{\alpha_1 - 1}$, der zweite von $\mathfrak{V}_{\alpha_1}$ bis $\mathfrak{V}_{\alpha_2 - 1}$ der dritte von $\mathfrak{V}_{\alpha_2}$ bis $\mathfrak{V}_{\alpha_3 - 1}$ usw. reichen soll. Der letzte ist $\mathfrak{V}_\nu = \mathfrak{B}_\varrho$. Wir bezeichnen die $(s+1)$ ersten Faktoren mit $\mathfrak{C}, \mathfrak{V}_{\alpha_1} \mathfrak{C}_1 = \mathfrak{B}_\varrho \mathfrak{C}_1, \ldots, \mathfrak{V}_{\alpha_s} \mathfrak{C}_s = \mathfrak{B}_\varrho \mathfrak{C}_s$. Wenn $\mathfrak{V}_{\alpha_1} = \mathfrak{V}_1$ ist, soll $\mathfrak{C} = 1$ sein. Aus

(118) und (121) ergibt sich, indem man in (118) der Reihe nach $k = \alpha_s, \alpha_{s-1}, \ldots, \alpha_1$ wählt, daß $(\mathfrak{B}_\varrho, \mathfrak{C}) = 0$ und $(\mathfrak{B}_\varrho, \mathfrak{C}_k) = 1$ ist. Da aber nach Annahme die in $\mathfrak{C}$ und in den $\mathfrak{C}_k$ enthaltenen Primteiler von $\mathfrak{B}_\varrho$ verschieden sind und daher ihre Schnittpunktzahlen mit $\mathfrak{B}_\varrho$ nicht negativ sein können, so ist in jedem Divisor $\mathfrak{C}_k$ genau ein Primteiler, der $\mathfrak{B}_\varrho$ in einem Punkte trifft, während die anderen und die in $\mathfrak{C}$ enthaltenen $\mathfrak{B}_\varrho$ nicht schneiden. Es ergibt sich also, daß die Zahlen $b_{\varrho k}$ gleich 0 oder -1 sind. Da wir in $\mathfrak{V}^0$ zwei nebeneinander stehende Primteiler miteinander vertauschen dürfen, wenn sie einander nicht treffen, so können wir annehmen, daß immer der *erste* Primteiler in jedem $\mathfrak{C}_k$ den Primteiler $\mathfrak{B}_\varrho$ schneidet.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{V}'^0$ den Divisor, der aus $\mathfrak{V}^0$ entsteht, wenn man das letzte $\mathfrak{B}_\varrho$, also $\mathfrak{V}_\nu$ fortläßt. Ferner denken wir uns jedes der anderen in $\mathfrak{V}^0$ vorkommenden $\mathfrak{B}_\varrho$ mit dem darauffolgenden $\mathfrak{V}_i$ vereinigt. Die dann in $\mathfrak{V}'^0$ noch vorhandenen $\nu - s - 1 = \nu'$ Faktoren bezeichnen wir unter Beibehaltung ihrer Reihenfolge mit $\mathfrak{V}'_1, \mathfrak{V}'_2, \ldots, \mathfrak{V}'_{\nu'}$. Die entsprechenden Änderungen nehmen wir mit dem Divisor $\mathfrak{B}$ vor. Unter Benutzung der in Nr. 1 und 2 eingeführten Zahlen $v_{ki} = -(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{V}_i)$, $b_{ki} = -(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_i)$ haben wir also

$$(122)\quad \mathfrak{B}'_k = \mathfrak{B}_k \mathfrak{B}_\varrho^{-b_{\varrho k}}, \quad \mathfrak{V}'_0 = \mathfrak{V}'^0 = \mathfrak{B}' = \mathfrak{V}_0 \mathfrak{V}_\nu^{-1} = \mathfrak{B}\mathfrak{B}_\varrho^{-1} = \mathfrak{B}_1'^{\beta_1} \mathfrak{B}_2'^{\beta_2} \ldots \mathfrak{B}_{\varrho-1}'^{\beta_{\varrho-1}}.$$

Die Exponenten der $\mathfrak{B}'_k$ in $\mathfrak{B}'$ sind dieselben wie die der $\mathfrak{B}_k$ in $\mathfrak{B}$ für $k = 1, 2, \ldots, \varrho - 1$. Denn $\mathfrak{V}'_0$ geht formal einfach dadurch aus $\mathfrak{V}_0$ hervor, daß man $\mathfrak{B}_\varrho$ überall fortläßt und die anderen $\mathfrak{V}_k$ durchnummeriert und mit einem Akzent versieht, und es entsteht also $\mathfrak{B}'$ aus $\mathfrak{B}$, indem man $\mathfrak{B}_\varrho$ fortläßt und die anderen $\mathfrak{B}_k$ mit einem Akzent versieht.

Wir setzen $(\mathfrak{B}'_k, \mathfrak{B}'_i) = -b'_{ki}$. Es wird

$$(123)\qquad b'_{ki} = -(\mathfrak{B}_k \mathfrak{B}_\varrho^{-b_{\varrho k}}, \mathfrak{B}_i \mathfrak{B}_\varrho^{-b_{\varrho i}}) = b_{ki} - b_{\varrho k} b_{\varrho i}.$$

Da wir angenommen haben, daß $(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}) = (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{K})$ und da das Geschlecht von $\mathfrak{B}_k$ null ist, so ist

$$(124)\qquad (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_k \mathfrak{K}) = -2 = (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_k \mathfrak{B}) = -b_{kk} + (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}).$$

Da $b_{\varrho\varrho} = 1$ ist, folgt hieraus für $k = \varrho$, daß $(\mathfrak{B}_\varrho, \mathfrak{B}) = -1$, und aus (122) ergibt sich dann, daß $(\mathfrak{B}_\varrho, \mathfrak{B}') = 0$ und

$$(125)\qquad (\mathfrak{B}'_k \mathfrak{B}') = (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}') = (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}) + b_{k\varrho}.$$

Aus (123), (124), (125) folgt

$$(126)\quad (\mathfrak{B}'_k, \mathfrak{B}'_k \mathfrak{B}') = -b_{kk} + b_{\varrho k}^2 + b_{\varrho k} + (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}) = -2 + b_{\varrho k}(1 + b_{\varrho k}).$$

Da aber, wie wir eben gesehen haben, die Zahlen $b_{\varrho k}$ gleich 0 oder -1 sind, so folgt aus (126)

$$(127)\qquad (\mathfrak{B}'_k, \mathfrak{B}'_k \mathfrak{B}') = -2.$$

Wie aus (123) hervorgeht, erhalten wir das System b' der $(\varrho - 1)^2$ Elemente b'_{ki} aus dem System b auf folgende Art. Wir addieren die letzte Zeile und die letzte Spalte von b zu denjenigen Parallelreihen, deren letztes Element von null verschieden, also gleich -1 ist. Wir erhalten eine Matrix, deren letzte Spalte und Zeile bis auf das letzte Element nur Nullen enthält. Lassen wir diese fort, so haben wir b'. Da $b_{ki} \leqq 0$ für $k \neq i$ und da $b_{\varrho k}$ gleich 0 oder -1 ist für $k \neq \varrho$, so folgt aus (123), daß $b'_{ki} \leqq 0$ für $k \neq i$, und aus (127) ergibt sich dann, daß $b'_{kk} > 0$. Da die $\mathfrak{B}'_k$ sich von den $\mathfrak{B}'_i$ nur durch die Bezeichnung unterscheiden, so ist auch $(\mathfrak{B}'_k, \mathfrak{B}'_i) \geqq 0$ für $k \neq i$ und kleiner als null für $k = i$. Und die Gleichung (127) können wir auch in der Form

$$(128)\qquad (\mathfrak{B}'_i, \mathfrak{B}'_i \mathfrak{B}'_0) = -2$$

schreiben.

Wir bezeichnen das Produkt aller $\mathfrak{V}'_\alpha$ von $\mathfrak{V}'_k$ bis $\mathfrak{V}'_\nu$ mit $\mathfrak{V}'^{k-1}$ und das Produkt aller $\mathfrak{V}'_\alpha$ von $\mathfrak{V}'_1$ bis $\mathfrak{V}'_k$ mit $\mathfrak{V}'^{k-1}_*$. Es bestehen dann, wie wir jetzt zeigen wollen, die (118) entsprechenden Gleichungen

$$(\mathfrak{B}'_k, \mathfrak{B}'^{k-1}) = (\mathfrak{B}'_k, \mathfrak{B}'^{k-1}_*) = -1. \tag{129}$$

Es ist entweder $\mathfrak{B}'_k = \mathfrak{B}_i$ und dann ist $(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_\varrho) = 0$ oder es ist $\mathfrak{B}'_k = \mathfrak{B}_\varrho \mathfrak{B}_i$ und dann ist $(\mathfrak{B}_i, \mathfrak{B}_\varrho) = 1$. Im ersten Falle ist $\mathfrak{B}'^{k-1} = \mathfrak{B}^{i-1} \mathfrak{B}_\varrho^{-1}$ und im zweiten $\mathfrak{B}'^{k-1} = \mathfrak{B}_\varrho \mathfrak{B}^{i-1} \mathfrak{B}_\varrho^{-1} = \mathfrak{B}^{i-1}$. In beiden Fällen ergibt sich die erste der Gleichungen (129) aus der ersten Gleichung (118). Die zweite Gleichung (129) folgt aus der ersten unter Benutzung von (128) ebenso wie wir oben die zweite der Gleichungen (118) hergeleitet haben.

Damit ist gezeigt, daß der Divisor $\mathfrak{B}'^0 = \mathfrak{B}'$ und seine Faktoren $\mathfrak{B}'_k$ oder $\mathfrak{B}'_i$ dieselben Eigenschaften haben wie der Divisor $\mathfrak{B}^0 = \mathfrak{B}$ und seine Faktoren $\mathfrak{B}_k$ oder $\mathfrak{B}_i$. Wir können daher die gemachten Schlüsse wiederholen. Es ergibt sich unter anderem, daß von den Zahlen b'_{kk} mindestens eine gleich 1 ist, die wir mit $b'_{\varrho-1,\varrho-1}$ bezeichnen können. Dann folgt ferner, daß in der letzten Zeile und Spalte von b', abgesehen vom Element $b'_{\varrho-1,\varrho-1}$, nur 0 und -1 steht. Wir addieren die letzte Zeile und Spalte von b' zu denjenigen Parallelreihen, deren letztes Element -1 ist, und lassen von dem so entstehenden quadratischen System die letzte Zeile und Spalte fort. Das so entstehende System b'' hat dann wieder die Eigenschaften 3., 4. und 5. der Nr. 2. Da wir so fortfahren können, so ergibt sich nach Nr. 2, daß, wie behauptet, die in $\mathfrak{B}_0 = \mathfrak{B}$ enthaltenen Primteiler eine Gemeinschaft von ausgezeichneten Punktprimteilern erster Art bilden, und daß $\mathfrak{B}$ ihr kanonischer Divisor ist. Das letzte folgt daraus, daß, wenn die Primteiler $\mathfrak{B}_i$ eine Gemeinschaft bilden, ihr kanonischer Divisor $\mathfrak{B}$ durch die Gleichungen (81) eindeutig bestimmt ist.

Wir stellen einige der Ergebnisse zusammen: *Jeder in dem Teiler $\mathfrak{B}_0$ der adjungierten Klassen enthaltene Primteiler $\mathfrak{B}_k$ ist Punktprimteiler, und zwar ein ausgezeichneter Primteiler erster Art. Sein Geschlecht ist also null. Es bestehen die Gleichungen*

$$(\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_0) = (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{K}), \quad (\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_0) = (\mathfrak{B}_0, \mathfrak{K}), \quad (\mathfrak{B}_k, \mathfrak{B}_k \mathfrak{B}_0) = -2. \tag{130}$$

Wegen (111) gilt noch die besonders wichtige Gleichung

$$\tau(\mathfrak{K}_0) = \tau(\mathfrak{K}/\mathfrak{B}_0) = \tau(\mathfrak{K}). \tag{131}$$

Es ist aber vorausgesetzt, daß die unabhängigen Veränderlichen passend gewählt sind.

III. Der Defekt der kanonischen Klasse und der Riemann-Rochsche Satz.

1. *Die Aufgabe.*

Es sei $\mathfrak{H}$ ein Primteiler ohne mehrfache Stellen der reduzierten, d. h. von dem gemeinsamen Teiler $\mathfrak{B}_0$ befreiten, adjungierten Klasse $(\mathfrak{K}_0 \mathfrak{L}^\alpha \mathfrak{M}^\beta)$, so daß

$$\mathfrak{H} \sim \mathfrak{K}_0 \mathfrak{L}^\alpha \mathfrak{M}^\beta. \tag{132}$$

Wir wollen beweisen, daß

$$\omega_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{K}) = 0, \tag{133}$$

wenn α und β genügend groß sind.

Es sei G die Projektion von $\mathfrak{H}$ und $G(x, y)$ die Idealnorm von $\mathfrak{H}$, so daß G der Zähler von $G(x, y)$ ist. Der Grad von $G(x, y)$ sei (λ, μ). Die Zahlen λ, μ wachsen mit α, β. G enthält $\mathfrak{H}$ als Faktor. Wir bezeichnen $\mathfrak{H}$ auch mit $\mathfrak{G}_1$ und die anderen Faktoren von G, soweit sie nicht Punktprimteiler sind, mit $\mathfrak{G}_2, \ldots, \mathfrak{G}_r$. Das Produkt der in G enthaltenen Punktprimteiler sei $\mathfrak{V}$. Wir haben dann

$$G = \mathfrak{V}\mathfrak{G} = \mathfrak{V}\mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 \ldots \mathfrak{G}_r \sim \mathfrak{L}^\lambda \mathfrak{M}^\mu, \tag{134}$$

wo $\mathfrak{G}$ als Abkürzung eingeführt ist.

Da wir den Grad von $G(x, y)$ beliebig groß wählen können, so können wir annehmen, daß G nicht die Projektion eines Verzweigungsprimteilers ist, so daß die Primteiler $\mathfrak{G}_k$ voneinander verschieden sind. Da die adjungierten Klassen und daher auch $\mathfrak{H}$ in enger

Beziehung zu den Punktprimteilern stehen, so wird i. a. die Kurve $G(x, y) = 0$ durch die Punkte gehen, die Projektionen von Punktprimteilern sind, d. h. durch die Punkte, wo die Projektionen der Verzweigungskurven mehrfache Punkte haben oder einander schneiden. I. a. wird die Kurve G an diesen Stellen sogar mehrfache Punkte haben. Die Zahl dieser Punkte ist aber endlich und das Verhalten von $G(x, y)$ in diesen Punkten ist unabhängig von der Größe der Gradzahlen λ, μ, wenigstens, sobald diese erst eine gewisse Größe erreicht haben. Da wir annehmen können, daß $\mathfrak{H}$ keine mehrfachen Stellen hat, so können wir voraussetzen, daß G keine anderen mehrfachen Punkte hat als die angegebenen.

Der Körper $\mathfrak{G}$ ist ein algebraischer Körper vom Relativgrade n über dem durch $G(x, y) = 0$ definierten Körper G. Er zerfällt in die r Körper $\mathfrak{G}_k$. Es sei $\mathfrak{Z}$ der Verzweigungsdivisor von K in bezug auf x, y, also die kanonische Klasse $(\mathfrak{K})$ gleich $(\mathfrak{Z}\mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2})$. Für $\mathfrak{G}_k = 0$ mögen $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{z}_k$, $\mathfrak{l}_k$ und $\mathfrak{m}_k$ übergehen, so daß die Klasse $(\mathfrak{K})$ zur Klasse $(\mathfrak{z}_k \mathfrak{l}_k^{-2} \mathfrak{m}_k^{-2})$ wird, die mit $(\mathfrak{r}_k)$ bezeichnet sei. Es bedeute $\mathfrak{t}_k$ einen ganzen Divisor dieser Klasse. Ist ihre Dimension null, enthält sie also keinen ganzen Divisor, so soll $\mathfrak{t}_k$ identisch null sein. Damit werden Divisoren eingeführt, die identisch null sind. Darüber wird in der nächsten Nr. noch einiges gesagt.

Hat die Klasse $(\mathfrak{r}_1)$ keinen ganzen Divisor, so ist natürlich $\omega_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{K}) = \omega_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{K}) = 0$. Es habe daher $(\mathfrak{r}_1)$ mindestens einen ganzen Divisor $\mathfrak{t}_1$. Wir haben zu beweisen, daß es dann in $(\mathfrak{K})$ einen ganzen Divisor $\mathfrak{T}$ gibt, der für $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{H} = 0$ in $\mathfrak{t}_1$ übergeht, und zwar muß das gelten für jeden ganzen Divisor $\mathfrak{t}_1$ aus $(\mathfrak{r}_1)$. Wir setzen

$$t_k = \mathfrak{t}_k \mathfrak{l}_k^2 \mathfrak{m}_k^2 \mathfrak{z}_k^{-1} \tag{135}$$

so daß t_k eine Funktion aus $\mathfrak{G}_k$ ist. Wir können dann unsere Aufgabe so formulieren: Es ist zu zeigen, daß man t_1 als rationale Funktion $T(x, y, z)$ so darstellen kann, daß T als Funktion aus K die Form hat

$$T = \mathfrak{T}\mathfrak{L}^2 \mathfrak{M}^2 \mathfrak{Z}^{-1}, \tag{136}$$

wo $\mathfrak{T}$ ein ganzer Divisor ist, der dann für $\mathfrak{G}_1 = 0$ in $\mathfrak{t}_1$ übergeht.

Die Funktion t_1 läßt sich auf unendlich viele Arten als Funktion aus K darstellen. So können wir z. B. noch willkürlich angeben, was aus T für $\mathfrak{G}_k = 0$ $(k = 2, 3, \ldots r)$ werden soll. Wenn aber T als Funktion aus K die Form (136) haben soll, so muß es für $\mathfrak{G}_k = 0$ in eine Funktion der Form (135) übergehen, wo $\mathfrak{t}_k$ ein ganzer Divisor aus $(\mathfrak{r}_k)$ ist. Hat $(\mathfrak{r}_k)$ keinen ganzen Divisor, so muß T für $\mathfrak{G}_k = 0$ identisch verschwinden, nimmt also auch die Form (135) an, wenn wir in diesem Falle, wie oben festgesetzt, unter $\mathfrak{t}_k$ die Null verstehen. Es genügt also zu beweisen:

Ist T eine Funktion des zerfallenden Körpers $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_1 \mathfrak{G}_2 \ldots \mathfrak{G}_r$, die als Funktion aus $\mathfrak{G}_k$ die Form (135) hat, wo $\mathfrak{t}_k$ irgendein ganzer Divisor der Klasse $(\mathfrak{r}_k)$ ist, so läßt sie sich als rationale Funktion von x, y, z so darstellen, daß sie als Funktion aus $\mathfrak{K}$ die Form (136) hat, wo $\mathfrak{T}$ ein ganzer Divisor ist.

2. *Der zerfallende Körper* $\mathfrak{G}$.

Wir betrachten im folgenden nicht die einzelnen Körper $\mathfrak{G}_k$, sondern den Körper $\mathfrak{G}$. Für $\mathfrak{G} = 0$ gehe $\mathfrak{Z}$ in $\mathfrak{z}$, $\mathfrak{L}$ in $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{m}$ über, also die Klasse $(\mathfrak{K})$ in $(\mathfrak{z}\mathfrak{l}^{-2}\mathfrak{m}^{-2})$. Wir haben dann zu zeigen:

Ist $\mathfrak{t}$ irgendein ganzer Divisor der Klasse $(\mathfrak{r}) = (\mathfrak{z}\mathfrak{l}^{-2}\mathfrak{m}^{-2})$, so läßt sich die Funktion $\mathfrak{t}\mathfrak{l}^2\mathfrak{m}^2\mathfrak{z}^{-1}$ des Körpers $\mathfrak{G}$ so als rationale Funktion von x, y, z darstellen, daß sie als Funktion aus K die Form $\mathfrak{T}\mathfrak{L}^2\mathfrak{M}^2\mathfrak{Z}^{-1}$ hat, wo $\mathfrak{T}$ ein ganzer Divisor ist.

Wir wollen noch etwas darauf eingehen, wie man formal den Zusammenhang zwischen einem Divisor aus $\mathfrak{G}$ und den ihn zusammensetzenden Divisoren $\mathfrak{c}_k$ der Teilkörper $\mathfrak{G}_k$ darstellen kann. Man vgl. auch I, Nr. 8. Es sei A_k die Funktion aus $\mathfrak{G}$, die in $\mathfrak{G}_k$ den Wert 1

und in den anderen $\mathfrak{G}_i$ den Wert 0 hat. Der Zähler von A_k ist ein ganzer Divisor der Hauptklasse von $\mathfrak{G}$. Wollen wir diesen Divisor beschreiben, so müssen wir — wenigstens für die Körper $\mathfrak{G}_i$ — den Divisor 0 einführen, was wir schon in der vorigen Nummer getan haben. Wir setzen fest: Eine Funktion ist dann und nur dann durch den zum Körper $\mathfrak{G}_k$ gehörenden Divisor 0 teilbar, wenn sie für $\mathfrak{G}_k = 0$ identisch null wird. Wir definieren dann einen ganzen Divisor $\mathfrak{e}_k$ des Körpers $\mathfrak{G}$ durch die Bestimmung, daß $\mathfrak{e}_k$ in $\mathfrak{G}_k$ gleich 1 und in den anderen $\mathfrak{G}_i$ gleich 0 sein soll. Es ist dann $\mathfrak{e}_k$ der Zähler von A_k. Die allgemeinste Funktion aus $\mathfrak{G}$ mit dem Nenner 1 hat die Form

$$A = c_1 A_1 + c_2 A_2 + \cdots + c_r A_r, \tag{137}$$

wo die c_i konstant sind. Diese Funktion hat im Körper $\mathfrak{G}_k$ den Wert c_k. Den Zähler von A, der ein ganzer Divisor der Hauptklasse von $\mathfrak{G}$ ist, werden wir entsprechend der Darstellung von A in (137) in folgender Weise durch die Divisoren $\mathfrak{e}_k$ ausdrücken:

$$\mathfrak{e} = c_1 \mathfrak{e}_1 + c_2 \mathfrak{e}_2 + \cdots + c_r \mathfrak{e}_r. \tag{138}$$

Diese Überlegungen können wir auf jede Funktion und jeden Divisor von $\mathfrak{G}$ übertragen.

Es sei Q irgendeine Funktion aus $\mathfrak{G}$. Es ist dann $Q_k = QA_k$ eine Funktion, die in $\mathfrak{G}_k$ mit Q übereinstimmt, in den anderen Körpern $\mathfrak{G}_i$ aber identisch verschwindet. Wir können Q als Summe der Funktionen Q_k darstellen oder, weil es auf konstante Faktoren nicht ankommt, auch in der Form

$$Q = c_1 Q_1 + c_2 Q_2 + \cdots + c_r Q_r, \tag{139}$$

eine Formel, die rein formal aus (137) durch Multiplikation mit Q entsteht. Man kann Q_k auch nur als Funktion aus $\mathfrak{G}_k$ auffassen, die in den anderen Körpern $\mathfrak{G}_i$ überhaupt nicht definiert ist. Dann muß man dem Pluszeichen in (139) eine andere Bedeutung beilegen, da es sich nicht mehr um eine Summe von Größen handelt, sondern da die Gleichung (139) nur der formale Ausdruck dafür ist, daß unter der Funktion Q des Körpers $\mathfrak{G}$ diejenige Funktion verstanden werden soll, die im Körper $\mathfrak{G}_k$ gleich Q_k ist, oder genauer, gleich $c_k Q_k$. Man sagt: Jede Funktion aus $\mathfrak{G}$ läßt sich als *direkte Summe* von r Funktionen darstellen, von denen jede einem der Körper $\mathfrak{G}_k$ angehört. Die Darstellung ist bis auf konstante Faktoren nur auf eine Art möglich. Man nennt daher auch $\mathfrak{G}$ die *direkte Summe* der Körper $\mathfrak{G}_k$.

Es sei $\mathfrak{q}$ irgendein Divisor aus $\mathfrak{G}$. Wir verstehen dann unter $\mathfrak{q}_k = \mathfrak{q}\mathfrak{e}_k$ den Teil von $\mathfrak{q}$, der zu $\mathfrak{G}_k$ gehört. Es ist also $\mathfrak{q}_k$ ein Divisor, der in $\mathfrak{G}_k$ mit $\mathfrak{q}$ übereinstimmt, aber in den anderen Körpern $\mathfrak{G}_i$ gleich null ist. Entsprechend (139) haben wir

$$\mathfrak{q} = c_1 \mathfrak{q}_1 + c_2 \mathfrak{q}_2 + \cdots + c_r \mathfrak{q}_r, \tag{140}$$

eine Formel, die auch aus (138) durch Multiplikation mit $\mathfrak{q}$ entsteht.

3. *Der Verzweigungsdivisor von $\mathfrak{G}$ in bezug auf G.*

Es ist $\mathfrak{G}$ ein Körper vom Relativgrade n über dem Körper G, der durch $G(x, y) = 0$ definiert ist. $\mathfrak{G}$ wird definiert, indem man zu dieser Gleichung noch die Definitionsgleichung des Körpers K hinzunimmt. Es sei $\bar{\mathfrak{z}}$ der Verzweigungsdivisor von $\mathfrak{G}$ in bezug auf G und $\mathfrak{w}$ der von G in bezug auf x. Dann ist der Verzweigungsdivisor von $\mathfrak{G}$ in bezug auf x gleich $\mathfrak{w}\bar{\mathfrak{z}}$. Setzen wir zur Abkürzung $\mathfrak{C} = \mathfrak{L}^{-\lambda}\mathfrak{M}^{-\mu}$, so ist nach (134) in der Umgebung einer Stelle S von K

$$G(x, y) = \mathfrak{V}'\mathfrak{C}\mathfrak{G},$$

woraus durch Differentiation nach u und v folgt

$$\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \mathfrak{C}\mathfrak{V}'\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial u} + \mathfrak{G}\frac{\partial(\mathfrak{V}'\mathfrak{C})}{\partial u},$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial G}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \mathfrak{C}\mathfrak{V}'\frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial v} + \mathfrak{G}\frac{\partial(\mathfrak{V}'\mathfrak{C})}{\partial v}.$$

Für $\mathfrak{G} = 0$ folgt hieraus wegen der Definition von $\mathfrak{Z}$ (A, I, Nr. 5)

$$\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{L}^2\mathfrak{M}^2}\frac{\partial G}{\partial y} = \mathfrak{C}\mathfrak{V}'\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\mathfrak{C}\mathfrak{V}'}{du}\begin{vmatrix} dx & d\mathfrak{G} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial \mathfrak{G}}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Da für $\mathfrak{G} = 0$ auch $d\mathfrak{G} = 0$, so ergibt sich weiter, wenn wir für $\mathfrak{C}$ seinen Wert $\mathfrak{L}^{-\lambda}\mathfrak{M}^{-\mu}$ setzen,

$$dx = \left\{\frac{\mathfrak{Z}\mathfrak{L}^{\lambda-2}\mathfrak{M}^{\mu-2}}{\mathfrak{V}'}\cdot\frac{du}{\partial\mathfrak{G}/\partial v}\cdot\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial y}\right\}_{\mathfrak{G}=0}. \tag{141}$$

Sind $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{d}$ die Divisoren der mehrfachen Stellen von G und $\mathfrak{G}$, so ist für $\mathfrak{G} = 0$

$$\frac{1}{du}\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial v} = \mathfrak{d}, \quad \frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial y} = \frac{\mathfrak{a}\mathfrak{w}}{\mathfrak{l}_\lambda\mathfrak{m}^{\mu-2}}, \quad dx = \frac{\bar{\mathfrak{z}}\mathfrak{w}}{\mathfrak{l}^2}.$$

Daher folgt aus (141), wenn wir noch den Divisor, in den $\mathfrak{V}'$ für $\mathfrak{G} = 0$ übergeht, mit $\mathfrak{v}'$ bezeichnen,

$$\bar{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}\frac{\mathfrak{a}}{\mathfrak{v}'\mathfrak{d}}. \tag{142}$$

Zu den Divisoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{v}'$ liefern nur die Stellen einen Beitrag, durch die Punktprimteiler gehen. Sehen wir also von den nur in endlicher Zahl vorhandenen Stellen des Körpers G ab, die Projektionen von Punktprimteilern sind, und die sowieso besonders behandelt werden müssen, so ist $\bar{\mathfrak{z}} = \mathfrak{z}/\mathfrak{d}$. Nach Annahme hat $\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{H}$ keinen mehrfachen Punkt. Auch die Primteiler $\mathfrak{G}_k$ werden i. a. keinen mehrfachen Punkt haben. Aber die $\mathfrak{G}_k$ werden sich gewiß gegenseitig schneiden und diese Schnittstellen liefern Beiträge zu $\mathfrak{d}$. Da $\bar{\mathfrak{z}}$ seiner Definition nach ein ganzer Divisor ist, so ist $\mathfrak{z}$ durch $\mathfrak{d}$ teilbar. Geometrisch besagt das: Die Schnittpunkte zweier Kurven der Fläche F, die dieselbe Projektion auf die xy-Ebene haben, liegen auf der Berührungskurve des zur z-Achse parallelen Berührungszylinders von F.

4. *Basen des Körpers* $\mathfrak{G}$.

Es sei ζ eine Basis von K für die Vielfachen von $\mathfrak{Z}^{-1}$. Vgl. A, I, Nr. 9. Die Funktionen ζ_k haben die Form

$$\zeta_k = \frac{\mathfrak{Q}_k}{\mathfrak{V}\mathfrak{Z}\mathfrak{L}^{\varrho_k}\mathfrak{M}^{\sigma_k}}, \tag{143}$$

wo $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{Q}_k$ ganze Divisoren sind, und zwar $\mathfrak{V}$ ein Punktdivisor. Ferner hat jede Funktion

$$Q = q_1\zeta_1 + q_2\zeta_2 + \cdots + q_n\zeta_n \tag{144}$$

aus K, wo die q_k ganze rationale Funktionen von x, y sind, die Form

$$Q = \frac{\mathfrak{Q}}{\mathfrak{V}\mathfrak{Z}\mathfrak{L}^{\varrho}\mathfrak{M}^{\sigma}}, \tag{145}$$

wo $\mathfrak{Q}$ ein ganzer Divisor ist, und umgekehrt läßt sich jede Funktion der Gestalt (145) in der Form (144) darstellen.

Als Funktionen des Körpers $\mathfrak{G}$ haben die ζ_k die Gestalt

$$\zeta_k = \frac{\mathfrak{q}_k}{\mathfrak{v}\mathfrak{z}\mathfrak{l}^{\varrho_k}\mathfrak{m}^{\sigma_k}}, \tag{146}$$

wo $\mathfrak{q}_k$ ein ganzer Divisor ist. Ferner hat jede Funktion der Form (144), wo die q_k ganze rationale Funktionen von x, y sind, als Funktion aus $\mathfrak{G}$ die Form

$$Q = \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{v}\mathfrak{z}\mathfrak{l}^{\varrho}\mathfrak{m}^{\sigma}}, \tag{147}$$

wo $\mathfrak{q}$ ein ganzer Divisor ist. Aber es ist nicht zu erwarten, daß auch das Umgekehrte gilt, daß also jede Funktion der Form (147) des Körpers $\mathfrak{G}$ sich in der Form (144) darstellen läßt mit ganzen rationalen Funktionen q_k. Schon aus folgenden beiden Gründen nicht.

Erster Grund: Es ist die Funktion Q in (144) schon dann von der Form (147), wenn die q_k ganze Funktionen des Körpers G sind. Da aber die Kurve G i. a. mehrfache Punkte hat, so ist nicht jede ganze Funktion aus G als ganze rationale Funktion von x, y darstellbar.

Zweiter Grund: Es ist ζ auch eine Basis für den Körper $\mathfrak{G}$, und zwar in dem Sinne, daß sich jede Funktion aus $\mathfrak{G}$ in der Form (144) darstellen läßt, wo die Koeffizienten q_k dem Unterkörper G angehören. Diese Darstellung ist eindeutig. Aber wenn auch ζ in K eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{Z}^{-1}$ ist, so folgt doch daraus keineswegs, daß ζ eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{z}^{-1}$ im Körper $\mathfrak{G}$ ist. Die Punktprimteiler wollen wir dabei ganz unberücksichtigt lassen, also auch die Divisoren $\mathfrak{V}$ und $\mathfrak{v}$. Auch abgesehen davon, ist ζ keine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{z}^{-1}$. Das würde, da die ζ_k Vielfache von $\mathfrak{z}^{-1}$ sind, dann und nur dann der Fall sein, wenn die Gleichung bestünde

$$|\zeta|^2 = IN(\mathfrak{z}^{-2})\, IN(\bar{\mathfrak{z}}), \tag{148}$$

wo unter $IN(\mathfrak{q})$ die Relativ-Idealnorm eines Divisors $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{G}$ in bezug auf den Unterkörper G zu verstehen ist. Es ist aber in K,

$$|\zeta|^2 = IN(\mathfrak{Z}^{-1})$$

und daher in $\mathfrak{G}$, wenn man die Punktprimteiler außeracht läßt,

$$|\zeta|^2 = IN(\mathfrak{z}^{-1}) = IN(\mathfrak{z}^{-2})\, IN(\mathfrak{z}).$$

Durch Vergleich mit (148) sehen, wir, daß ζ keine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{z}^{-1}$ ist, da $\bar{\mathfrak{z}}$ nicht gleich $\mathfrak{z}$ ist. Im genaueren ergibt sich aus (142), daß, auch wenn Q ein Vielfaches von $\mathfrak{z}^{-1}$ ist, die Funktionen q_k in (144) an den Stellen nicht notwendig ganz sind, die mehrfache Stellen von G sind oder die einen Beitrag zu dem Divisor $\mathfrak{d}$ der mehrfachen Stellen von $\mathfrak{G}$ liefern.

Ein einfaches Beispiel hierzu ist folgendes. Es sei K definiert durch die Gleichung

$$F \equiv z^2 - x - x^2 + y^2 = 0.$$

und es sei $G(x, y) = x - y^2$. Für $G = 0$ zerfällt F rational in die beiden Faktoren $z - x$ und $z + x$, so daß der Körper $\mathfrak{G}$ in zwei Körper $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ zerfällt, die beide nicht verzweigt sind in bezug auf G, so daß hier $\bar{\mathfrak{z}} = 1$ ist. Der Verzweigungsdivisor $\mathfrak{Z}$ von K ist hier der Zähler von z und eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{Z}^{-1}$ bilden die beiden Funktione $\zeta_1 = 1$ und $\zeta_2 = z^{-1}$ Es ist also

$$Q = q_1 + q_2 z^{-1}$$

dann und nur dann ein Vielfaches von $\mathfrak{Z}^{-1}$, wenn q_1 und q_2 ganze rationale Funktionen von x, y sind. Für $\mathfrak{G} = 0$ geht z in x oder $-x$ über. Bezeichnen wir die bei $x = 0$ in $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ vorhandenen Primteiler mit $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$, so ist $\mathfrak{z} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$. Ein Vielfaches von $\mathfrak{z}^{-1}$ im Körper $\mathfrak{G}$ darf daher für $x = 0$ unendlich werden wie x^{-1} und die Funktion Q ist auch dann ein Vielfaches von $\mathfrak{z}^{-1}$ wenn q_1 den Nenner x hat.

Glücklicherweise sind die beiden angegebenen Gründe in unserm Falle nicht stichhaltig. Es kommt das daher, daß wir den Grad (λ, μ) von $G(x, y)$ beliebig groß wählen dürfen, während andrerseits die Ordnung des Unendlichwerdens der Koeffizienten q_k in (144) für unendliches x oder y bei unserer Verwendung dieser Formel beschränkt ist. Daraus folgt zunächst, daß die q_k für endliches x, y vielleicht an einigen Stellen unendlich werden dürfen, aber nicht können, da das Geschlecht des Körpers G sehr groß angenommen werden kann und es daher in G Funktionen, die nur an einigen gegebenen Stellen unendlich werden, nicht gibt. Hierdurch wird es verständlich, daß in unserm Falle trotz

des zweiten Grundes die Funktionen q_k ganze Funktionen aus G sein müssen. Daß sie sich dann als ganze rationale Funktionen von x, y darstellen lassen, folgt aus dem in der nächsten Nummer bewiesenen Hilfssatze, daß nämlich eine ganze Funktion aus G sich immer dann als ganze rationale Funktion von x, y darstellen läßt, wenn ihre Ordnung genügend klein ist. Daher ist auch der erste Grund nicht stichhaltig.

Dies sind natürlich alles nur vorbereitende Betrachtungen.

5. *Ein Satz über die ganzen Funktionen eines algebraischen Körpers einer Veränderlichen.*

Wir beweisen folgenden Satz, dessen zweiter Teil von Severi stammt, während der erste lange bekannt ist:

Es sei $G(x, y)$ eine ganze rationale Funktion von x und y vom Grade (λ, μ). Der Divisor der mehrfachen Punkte der durch $G = 0$ definierten Kurve G sei $\mathfrak{a}$ und habe die Ordnung 2δ. Dann gilt erstens:

Die Zahl der linear unabhängigen Bedingungen dafür, daß eine ganze rationale Funktion von x, y vom Grade (ϱ, σ) als Funktion des Körpers G durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist, ist δ, wenn ϱ und σ genügend groß sind.

Gilt dies für $\varrho \geqq \varrho_0$, $\sigma \geqq \sigma_0$, so haben wir zweitens:

Ist h eine ganze Funktion des Körpers $\mathfrak{G}$ der Ordnung (r, s), d. h. hat h die Form $\mathfrak{h}/\mathfrak{l}^r\mathfrak{m}^s$, wo $\mathfrak{h}$ ein ganzer Divisor ist und wo $\mathfrak{l}$ und $\mathfrak{m}$ die Nenner von x und y sind, so ist h als ganze rationale Funktion von x, y vom Grade (r, s) darstellbar, wenn

$$r \leqq \lambda - \varrho_0 - 2, \quad s \leqq \mu - \sigma_0 - 2. \tag{149}$$

Es sei $G_0\,(x, y)$ eine ganze rationale Funktion von x, y vom Grade (λ_0, μ_0), die so beschaffen sei, daß die Kurve G_0, die durch $G_0 = 0$ definiert wird, dieselben mehrfachen Punkte wie G hat und sich an diesen Punkten geradeso verhält wie G. Das soll folgendes bedeuten. In der Umgebung eines mehrfachen Punktes P habe $G = 0$ die ν Lösungen $y = y_i$, $(i = 1, 2, \ldots, \nu)$. Es soll dann dort $G_0 = 0$ auch ν Lösungen $y = y_i'$ haben und diese Lösungen sollen sich so einander zuordnen lassen, daß die Differenz $y_k - y_i$ durch dieselbe Potenz von x teilbar ist wie $y_k' - y_i'$. Der Divisor $\mathfrak{a}_0$ der mehrfachen Punkte von G_0 hat dann auch die Ordnung 2δ und eine ganze rationale Funktion von x, y ist durch $\mathfrak{a}$ teilbar, wenn sie durch $\mathfrak{a}_0$ teilbar ist und umgekehrt. Es ist also auch die Zahl der Bedingungen dieselbe für die Teilbarkeit durch $\mathfrak{a}$ oder durch $\mathfrak{a}_0$.

Die Dimension der Klasse $(\mathfrak{l}^\varrho\mathfrak{m}^\sigma)$ ist um 2δ größer als die Dimension von $(\mathfrak{l}^\varrho\mathfrak{m}^\sigma/\mathfrak{a}_0)$, da ihre Ordnung um 2δ größer ist, wenn nur ϱ und σ so groß gewählt sind, daß die Ergänzungsklasse von $(\mathfrak{l}^\varrho\mathfrak{m}^\sigma/\mathfrak{a}_0)$ die Dimension null hat. Es ist also 2δ die Zahl der linear unabhängigen Bedingungen dafür, daß eine ganze Funktion genügend hoher Ordnung aus G_0 durch $\mathfrak{a}_0$ teilbar ist. Unter diesen sind aber nach dem Schluß von I, Nr. 10 genau δ linear unabhängige, die sich nicht als ganze rationale Funktionen von x, y darstellen lassen, und diese gehören gewiß zu den nicht durch $\mathfrak{a}_0$ teilbaren Funktionen, da eine durch den Divisor der mehrfachen Punkte teilbare ganze Funktion sich immer als ganze rationale Funktion von x, y darstellen läßt. Es bleiben daher für die ganzen rationalen Funktionen von x, y genau δ Bedingungen dafür, daß sie durch $\mathfrak{a}_0$, und also auch dafür, daß sie durch $\mathfrak{a}$ teilbar sind, wenn nur ihr Grad (ϱ, σ) genügend groß ist, etwa dann, wenn $\varrho \geqq \varrho_0$, $\sigma \geqq \sigma_0$. Für uns ist wichtig, daß die Zahlen ϱ_0, σ_0 vielleicht von λ_0, μ_0 abhängen, aber gewiß nichts mit λ, μ zu tun haben, sich vor allem nicht ändern, wenn man den Grad (λ, μ) von $G(x, y)$ vergrößert, ohne das Verhalten der Kurve G an den mehrfachen Stellen zu ändern. Damit ist der erste Teil unseres Satzes bewiesen.

Die kanonische Klasse von G ist $(\mathfrak{l}^{\lambda-2}\mathfrak{m}^{\mu-2}/\mathfrak{a})$. Die Ergänzungsklasse der Klasse $(\mathfrak{q}) = (\mathfrak{l}^r\mathfrak{m}^s)$ ist also $(\mathfrak{q}') = (\mathfrak{l}^{\lambda-r-2}\mathfrak{m}^{\mu-s-2}/\mathfrak{a})$. Ist $\mathfrak{g}$ ein ganzer Divisor der Klasse $(\mathfrak{q}')$, so ist

$$\frac{\mathfrak{g}\mathfrak{a}}{\mathfrak{l}^{\lambda-r-2}\mathfrak{m}^{\mu-s-2}} = H(x, y)$$

eine ganze Funktion aus G, die durch $\mathfrak{a}$ teilbar ist, die sich also als ganze rationale Funktion von x, y vom Grade $(\lambda - r - 2, \mu - s - 2)$ darstellen läßt. Nehmen wir an, daß λ und μ so groß sind, daß $\lambda - r - 2 \geqq \varrho_0$, $\mu - s - 2 \geqq \sigma_0$, daß also die Ungleichheiten (149) erfüllt sind, so ist nach dem ersten Teile unseres Satzes die Zahl der linear unabhängigen dieser Funktionen, also die Dimension der Klasse $(\mathfrak{q}')$

$$\{\mathfrak{q}'\} = (\lambda - r - 1)(\mu - s - 1) - \delta. \tag{150}$$

Ist p das Geschlecht von G, so ist

$$p = (\lambda - 1)(\mu - 1) - \delta, \tag{151}$$

$$\{\mathfrak{q}\} = \{\mathfrak{l}^r \mathfrak{m}^s\} = r\mu + s\lambda - p + 1 + \{\mathfrak{q}'\},$$

oder wegen (150), (151)

$$\{\mathfrak{l}^r \mathfrak{m}^s\} = (r + 1)(s + 1),$$

so daß die Zahl der linear unabhängigen ganzen Funktionen der Ordnung (r, s) genau so groß ist wie die Zahl der linear unabhängigen ganzen rationalen Funktionen von x, y vom Grade (r, s). Diese bleiben wegen $r < \lambda$, $s < \mu$ auch für $G = 0$ linear unabhängig. Damit ist auch der zweite Teil unseres Satzes bewiesen.

6. *Die Vielfachen von* $\mathfrak{z}^{-1}$.

Unsere Aufgabe ist, die Funktionen des Körpers $\mathfrak{G}$ darzustellen, die die Form haben

$$R = \frac{\mathfrak{r}\mathfrak{l}^2\mathfrak{m}^2}{\mathfrak{z}}, \tag{152}$$

wo $\mathfrak{r}$ ein ganzer Divisor ist. Unter diesen haben wir dann diejenigen auszusuchen, die als Funktionen des Körpers $\mathfrak{G}_1$ oder $\mathfrak{H}$ die Form haben

$$R = \frac{\mathfrak{r}_1\mathfrak{l}^2\mathfrak{m}^2}{\mathfrak{z}_1}, \tag{153}$$

wo $\mathfrak{r}_1$ wieder ein ganzer Divisor ist.

Zunächst können wir jede Funktion aus $\mathfrak{G}$, also auch eine Funktion R der Form (152) durch die Basis ζ darstellen, etwa

$$R = r_1\zeta_1 + r_2\zeta_2 + \cdots + r_n\zeta_n, \tag{154}$$

wo die r_k Funktionen des Körpers G sind. Es fragt sich, wie diese Funktionen beschaffen sein müssen, damit R die Form (152) hat. Um das festzustellen, betrachten wir R in der Umgebung einer Stelle S von G. Es zerfällt S in $\mathfrak{G}$ in n Stellen S_k, die alle oder zum Teil zusammenfallen können. Wir bezeichnen ζ_k auch mit ζ_{k1} und die konjugierten Funktionen mit $\zeta_{k2}, \zeta_{k3}, \ldots, \zeta_{kn}$ und verstehen unter ζ das quadratische System der ζ_{ki}. Bei passender Wahl der Bezeichnung ist ζ_{ki} der Wert von ζ_k in der Umgebung der Stelle S_i. Bezeichnen wir die Idealnorm von $\mathfrak{Z}$ mit $Z(x, y)$, so besteht die schon oben benutzte Gleichung

$$|\zeta|^2 = \frac{1}{Z(x, y)}. \tag{155}$$

Schließlich bedeute ξ eine Größe aus G, die an der Stelle S von der ersten Ordnung null wird. Wir unterscheiden verschiedene Fälle, und zwar betrachten wir zunächst Stellen S, wo x und y endlich sind.

1. Es sei S nicht Projektion eines Punktprimteilers und es gehe durch S keine Projektion eines Verzweigungsprimteilers, d. h. es werde $Z(x, y)$ in S nicht null.

Die n Stellen S_k sind voneinander verschieden und die ζ_{ki} werden gewöhnliche Potenzreihen von ξ. Die Determinante ihrer Anfangskoeffizienten ist wegen (155) von

Null verschieden, da $Z(x, y)$ in S nicht verschwindet. Mit anderen Worten, die Matrix ζ ist eine Einheit für die Stelle S. Ferner folgt, weil $Z(x, y)$ in S nicht verschwindet, daß keine der Stellen S_k einen Beitrag zu $\mathfrak{z}$ liefert, daß also R für die Umgebung dieser Stellen ganz ist. Da aber ζ eine Einheit für die Stelle S ist, so ergibt sich daraus, daß die Faktoren r_k für die Stelle S ganz sein müssen.

2. Es sei S nicht Projektion eines Punktprimteilers, aber es verschwinde $Z(x, y)$ in S.

Es sei wie in A, I, Nr. 4 $w(x, y)$ das Polynom von x, y, das dieselben Faktoren enthält wie $Z(x, y)$, aber jeden nur in der ersten Potenz. Dann ist S eine einfache Stelle der Kurve $w = 0$. Es wird in S nur ein Faktor von w Null, etwa $W(x, y)$ und es ist S keine mehrfache Stelle der Kurve $W = 0$. Die Stellen S_k, die in diesem Falle zum Teil oder auch alle zusammen fallen können, aber nicht müssen, liefern einen Beitrag zu $\mathfrak{z}$, so daß R an den Stellen S_k nicht ganz zu sein braucht. Da aber w durch $\mathfrak{Z}$ teilbar ist, so ist wR an den Stellen S_k ganz. Wir setzen $wr_k = t_k$ und haben

$$wR = t_1 \zeta_1 + t_2 \zeta_2 + \cdots + t_n \zeta_n. \tag{156}$$

Für uns genügt es, wie wir sehen werden, zu wissen, daß die t_k ganz sind in S. Es sei W die Projektion etwa zweier Primteiler $\mathfrak{W}_1$ und $\mathfrak{W}_2$. Es sei $\mathfrak{W}_i$ vom Grade f_i und Verzweigungsprimteiler der Verzweigungsordnung $\alpha_i - 1$. (Vgl. A, I, Nr. 4 und A, II, Nr. 13). Es ist $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 = n$. Wir verstehen unter M_i eine quadratische Matrix, deren erste Zeile

$$1, W^{\frac{1}{\alpha_i}}, W^{\frac{2}{\alpha_i}}, \ldots, W^{\frac{\alpha_i - 1}{\alpha_i}}$$

ist, während die anderen Zeilen zur ersten konjugiert sind. Es sei dann M die Matrix, die man erhält, wenn man f_1 Matrizen M_1 und f_2 Matrizen M_2 diagonal aneinander reiht. Definieren wir jetzt das System η durch

$$\zeta = M\eta, \tag{157}$$

so sind die Elemente von η in der Umgebung von S gewöhnliche Potenzreihen von ξ und die Determinante der Anfangskoeffizienten wird nicht null für $\xi = 0$, wie aus (155) und (157) folgt, wenn man beachtet, daß der reziproke Wert des Quadrates der Determinante von M genau durch dieselbe Potenz von W teilbar ist wie $Z(x, y)$. Es ist also η eine Einheit für die Stelle S.

Es bedeute t die aus der einen Spalte $t_1, t_2, \ldots, t_n$ bestehende Matrix und es sei $\eta t = s$ gesetzt. Nach (156), (157) haben wir

$$wR = \zeta t = M\eta t = Ms.$$

Da W nach Annahme für $\xi = 0$ verschwindet, so sind die Elemente von Ms sicher nur dann ganz an der Stelle S, wenn dasselbe von den s_k gilt. Diese Bedingung ist gewiß nicht hinreichend, aber sie genügt für uns. Dann folgt aus $\eta t = s$, daß auch die t_k in S ganz sein müssen, da η eine Einheit für S ist. Außerdem sind die t_k an den unter 1. betrachteten Stellen ganz, da $t_k = wr_k$ und da schon die r_k an diesen Stellen ganz sein müssen.

3. Es sei S die Projektion eines Punktprimteilers.

Es habe x in S den Wert a. Damit wR und die konjugierten Funktionen in S ganz sind, ist nicht notwendig, daß die t_k es sind. Es können die Entwicklungen der t_k nach Potenzen von $x - a$ eine endliche Zahl von negativen Potenzen enthalten. Es gibt dann aber immer eine ganze positive Zahl γ, so daß die Funktionen $(x - a)^\gamma t_k$ in S ganz sind. Der Exponent γ hängt von dem Verhalten der Funktionen ζ und der Funktion $G(x, y)$ in S ab, ist also unabhängig von den Gradzahlen λ, μ von $G(x, y)$, und damit auch von den Exponenten α, β in (132).

Die Zahl der Stellen S, die Projektionen von Punktprimteilern sind, ist endlich. Ihre Anzahl sei ν und die Werte, die x dort annimmt, seien $a_1, a_2, \ldots, a_\nu$. Bezeichnen wir das Produkt der ν Linearfaktoren $x - a_k$ mit g, so können wir sagen, daß bei passender Wahl der positiven ganzen Zahl γ die Funktionen $g^\gamma t_k$ an allen Stellen ganz sind, wo x und y endliche Werte haben. Dabei ist der Exponent γ von α und β unabhängig. Wir setzen noch $wg^\gamma = C(x, y)$ und bezeichnen den Grad der ganzen rationalen Funktion C mit (p, q). Dann können wir unser bisheriges Ergebnis so aussprechen:

Hat die Funktion R im Körper $\mathfrak{H}$ die Form (153), so gibt es eine ganze rationale Funktion $C(x, y)$, so daß sich CR in der Form

$$C(x, y)R = s_1 \zeta_1 + s_2 \zeta_2 + \cdots + s_n \zeta_n \tag{158}$$

darstellen läßt, wo die s_k ganze Funktionen des Körpers G sind. Dabei sind die Gradzahlen (p, q) von C von α und β unabhängig.

4. Es werde x an der Stelle S unendlich.

Da die ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{H}) = (\mathfrak{R}_0 \mathfrak{L}^\alpha \mathfrak{M}^\beta)$ keine festen Schnittpunkte haben, so können wir annehmen, daß $\mathfrak{H}$ durch keine Stelle geht, wo x und y gleichzeitig unendlich werden. Wir können ferner voraussetzen, daß an den Stellen, wo x unendlich wird und durch die $\mathfrak{H}$ geht, y Werte hat, die von irgend welchen gegebenen Werten und auch untereinander verschieden sind. Das entsprechende gilt dann von der Projektion G von $\mathfrak{H}$. Wir können also annehmen, daß in $G(x, y)$ das Glied mit der λ-ten Potenz von x vorkommt und daß der Faktor $h(y)$ von x^λ vom Grade μ ist und voneinander verschiedene Nullstellen hat. Diese seien $b_1, b_2, \ldots, b_\mu$. Dann ergibt sich aus $G = 0$ in der Umgebung von $x = \infty$, $y = b_i$ für $y - b_i$ eine gewöhnliche Potenzreihe von x^{-1}.

Die Funktionen ζ_{ki} lassen sich in der Umgebung von $x = \infty$ nach ganzen steigenden Potenzen von x^{-1} entwickeln. Die Determinante der Anfangskoeffizienten kann identisch Null sein. Dann gibt es eine quadratische Matrix a von n Zeilen, deren Elemente ganz rational in x und rational in y sind und deren Determinante nur von y abhängt und nicht identisch verschwindet, und die folgendes leistet. Setzen wir $\zeta a = \eta$, so ist die Determinante der Anfangskoeffizienten der Entwicklungen der Elemente η_{ki} von η nach Potenzen von x^{-1} nicht identisch Null. Diese Determinante heiße δ. Ihr Quadrat ist eine rationale Funktion von y. Nach dem zu Anfang dieses Falles 4 Bemerkten können wir annehmen, daß δ weder 0 noch ∞ wird, wenn y einen der Werte b_k annimmt.

Es bedeute s die Matrix mit der einen Spalte $s_1, s_2, \ldots, s_n$ und es sei die Matrix h durch $s = ah$ definiert. Dann können wir (158) schreiben:

$$CR = \zeta s = \eta h. \tag{159}$$

Für $x = \infty$ habe η_k die Ordnung $-\varrho_k$, was bedeuten soll, daß die n konjugierten Funktionen $\eta_{k1}, \eta_{k2}, \ldots, \eta_{kn}$ für $x = \infty$ mindestens von der Ordnung ϱ_k Null werden sollen und wenigstens eine genau von dieser Ordnung. Das Anfangsglied der Entwicklung von η_{ki} in der Umgebung von $x = \infty$ können wir also in der Form $b_{ki} x^{-\varrho_k}$ schreiben, so daß $\delta = |b_{ki}|$ wird. Die Ordnungszahlen $-\varrho_k$ hängen nur vom Körper K ab und haben mit dem Primteiler $\mathfrak{H}$ oder seiner Projektion G nichts zu tun, sind also unabhängig von den Gradzahlen λ, μ und α, β. Wir gehen jetzt zum Körper $\mathfrak{G}$ über und zwar zur Umgebung der Stelle $x = \infty$, $y = b_i$. Wir können $\mathfrak{H}$ so gewählt annehmen, daß die n Stellen, die dieser Stelle in K entsprechen, regulär sind. Aus $G(x, y) = 0$ folgt dann, wie schon oben angegeben, $y - b_i$ als gewöhnliche Potenzreihe von x^{-1}, in der der Faktor von x^{-1} nicht Null ist. Ferner sind die η_{ki} als gewöhnliche Potenzreihen von x^{-1} und $y - b_i$ darstellbar. Hieraus erhalten wir die Entwicklungen der η_{ki} nach Potenzen von x^{-1} in der Umgebung der betrachteten Stelle, indem wir die Reihe für $y - b_i$ einsetzen. Die Ordnungszahlen $-\varrho_k$ könnten dadurch höchstens verkleinert werden. Das kann aber nicht ein-

treten, da die Determinante der Anfangskoeffizienten $\delta = |b_{ki}|$ für $y = b_i$ nicht verschwindet. Daher haben die η_k an der Stelle $x = \infty, y = b_i$ auch als Funktionen aus $\mathfrak{G}$ die Ordnungszahlen $-\varrho_k$. Da C an dieser Stelle höchstens von der Ordnung p unendlich wird und R mindestens von der zweiten Ordnung verschwinden soll, so folgt aus (159), daß h_k als Funktion des Körpers G für unendliches x höchstens von der Ordnung $p + \varrho_k - 2$ unendlich werden darf. Die Ordnung des Unendlichwerdens der h_k ist also beschränkt und aus $s = ah$ folgt, daß dasselbe für die s_k gilt.

Da wir dieselben Betrachtungen für diejenigen Stellen anstellen können, wo y unendlich wird, so können wir das Ergebnis dieser Nr. dahin zusammenfassen:

Ist R eine Funktion aus $\mathfrak{H}$, die die Gestalt $\mathfrak{r}_1 \mathfrak{l}^2 \mathfrak{m}^2/\mathfrak{z}_1$ hat, wo $\mathfrak{r}_1$ ein ganzer Divisor ist, so gibt es eine ganze rationale Funktion C von x, y, so daß $CR = \zeta s$, wo die s_k ganze Funktionen des Körpers G, der Projektion von $\mathfrak{H}$, sind, deren Ordnungszahlen für unendliches x und y beschränkt sind, die sich also nach dem in Nr. 5 bewiesenen Satze als ganze rationale Funktionen von x, y darstellen lassen, wenn wir nur die Zahlen α, β und damit λ, μ genügend groß wählen. Da aber ζ eine Basis für die Vielfachen von $\mathfrak{Z}^{-1}$ ist, so folgt, daß CR fast ein Vielfaches von $\mathfrak{Z}^{-1}$ ist, (A, I, Nr. 9), also die Form hat $\mathfrak{A}/\mathfrak{B}'\mathfrak{Z}\mathfrak{L}^{\varrho}\mathfrak{M}^{\sigma}$, wo $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}'$ ganze Divisoren sind, und zwar $\mathfrak{B}'$ ein Punktdivisor. Dividieren wir noch mit C, so sehen wir, daß wir R so wählen können, daß es als Funktion aus K die Gestalt hat

$$R = \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{L}^2\mathfrak{M}^2}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{Z}\mathfrak{L}^r\mathfrak{M}^s} = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{B}\mathfrak{C}\mathfrak{K}\mathfrak{L}^r\mathfrak{M}^s}, \tag{160}$$

wo $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{R}$ ganze Divisoren sind, und zwar $\mathfrak{B}$ ein Punktdivisor. Die Zahlen r und s sind unabhängig von α und β und es soll $\mathfrak{K}$ hier den Divisor $\mathfrak{Z}\mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2}$ bedeuten.

7. *Beweis des Satzes, daß* $\omega_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{K}) = 0$.

Wir können und wollen annehmen, daß in (160) die Divisoren $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{BC}$ teilerfremd sind und daß $\mathfrak{R}$ weder durch $\mathfrak{L}$ noch durch $\mathfrak{M}$ teilbar ist. Wir bezeichnen den Divisor, in den ein Divisor des Körpers K für $\mathfrak{H} = 0$ übergeht, mit demselben, aber kleinem Buchstaben, so daß

$$(R)_{\mathfrak{H}=0} = \frac{\mathfrak{r}}{\mathfrak{v}\mathfrak{c}\mathfrak{k}\mathfrak{l}^r\mathfrak{m}^s}. \tag{161}$$

Andrerseits hat aber R als Funktion des Körpers $\mathfrak{H}$ nach Definition die Gestalt

$$(R)_{\mathfrak{H}=0} = \frac{\mathfrak{r}_1}{\mathfrak{k}}, \tag{162}$$

wo $\mathfrak{r}_1$ ein ganzer Divisor ist, wobei benutzt ist, daß $\mathfrak{z}/\mathfrak{l}^2\mathfrak{m}^2 = \mathfrak{k}$ ist. Durch Vergleich von (161) mit (162) folgt, daß $\mathfrak{r}$ durch $\mathfrak{v}\mathfrak{c}\mathfrak{l}^r\mathfrak{m}^s$ teilbar sein muß. Es sei $\mathfrak{P}$ ein in $\mathfrak{C}\mathfrak{L}^r\mathfrak{M}_s$ enthaltener Primteiler, der nicht in $\mathfrak{R}$ vorkommt. Da die ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{H})$ keine festen Schnittpunkte haben, so können wir annehmen, daß $\mathfrak{H}$ den Primteiler $\mathfrak{P}$ in voneinander verschiedenen Punkten trifft. Diese Punkte seien $S_1, S_2, \ldots, S_\nu$. Ihre Anzahl ν ist $(\mathfrak{P}, \mathfrak{H})$. Der zur Stelle S_k gehörende Primteiler von $\mathfrak{H}$ sei $\mathfrak{p}_k$. Dann geht $\mathfrak{P}$ für $\mathfrak{H} = 0$ in $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2\ldots\mathfrak{p}_\nu$ über. Da $\mathfrak{r}$ durch diesen Divisor teilbar sein muß, so muß $\mathfrak{R}$ durch die Stellen S_k gehen. Da aber durch jede dieser Stellen der Primteiler $\mathfrak{P}$ geht, so folgt, daß die Zahl $(\mathfrak{P}, \mathfrak{R})$ der Schnittpunkte von $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{R}$ mindestens so groß ist wie die Anzahl $\nu = (\mathfrak{P}, \mathfrak{H})$ der Stellen S_k, so daß

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{R}) \geqq (\mathfrak{P}, \mathfrak{H}). \tag{163}$$

Nach (132) ist $\mathfrak{H} \sim \mathfrak{K}_0\mathfrak{L}^{\alpha}\mathfrak{M}^{\beta}$ und nach (160) $\mathfrak{R} \sim \mathfrak{BCK}\mathfrak{L}^r\mathfrak{M}^s$. Setzen wir also $(\mathfrak{P}, \mathfrak{L}) = p_1$, $(\mathfrak{P}, \mathfrak{M}) = p_2$, $(\mathfrak{P}, \mathfrak{K}_0) = p_0$, $(\mathfrak{P}, \mathfrak{BCK}) = p$, so ergibt sich aus (163)

$$(\alpha - r)p_1 + (\beta - s)p_2 + p_0 - p \leqq 0. \tag{164}$$

Da $\mathfrak{P}$ kein Punktprimteiler ist, so sind p_1 und p_2 nicht beide Null und aus (164) ergibt sich ein Widerspruch, da α und β beliebig groß gewählt werden dürfen, ohne daß sich

dabei r, s, p_0 und p ändern. Unsere Annahme, daß in $\mathfrak{C}\mathfrak{L}^r\mathfrak{M}^s$ ein Primteiler $\mathfrak{P}$ vorkommt, der in $\mathfrak{R}$ nicht enthalten ist, muß daher falsch sein. Das heißt aber, es ist $\mathfrak{C} = 1$, $r = s = 0$. Also hat R die Form

$$R = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{V}\mathfrak{K}}. \tag{165}$$

Wir setzen wie früher $\mathfrak{K} = \mathfrak{V}_0\,\mathfrak{K}_0$, wo $\mathfrak{V}_0$ der Teiler der adjungierten Klassen ist. Es können $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{V}_0$ einen gemeinsamen Faktor haben, den wir uns fortgehoben denken. Dann wird

$$R = \frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{V}\mathfrak{V}_0'\mathfrak{K}_0}, \tag{166}$$

wo jetzt $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{V}\mathfrak{V}_0'$ teilerfremd sind. Ist $\mathfrak{V}\mathfrak{V}_0'$ nicht gleich 1, so gibt es nach II, Nr. 1, 5 in $\mathfrak{V}\mathfrak{V}_0'$ einen Primteiler $\mathfrak{V}_1$, für den $(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}\mathfrak{V}_0') < 0$. Da nach (166) $\mathfrak{R}_0 \sim \mathfrak{V}\mathfrak{V}_0'\,\mathfrak{K}_0$, so wird

$$(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{R}_0) = (\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}\mathfrak{V}_0') + (\mathfrak{V}_1, \mathfrak{K}_0) < (\mathfrak{V}_1, \mathfrak{K}_0). \tag{167}$$

Da $\mathfrak{V}_1$ nicht in $\mathfrak{R}_0$ enthalten ist, so ist $(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{R}_0) \geqq 0$, so daß aus (167) zunächst folgt, daß $(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{K}_0)$ nicht Null sein kann. Es ist daher nach II, Nr. 6 $\mathfrak{V}_1$ nicht in $\mathfrak{V}_0$, also auch nicht in $\mathfrak{V}_0'$ enthalten, so daß $\mathfrak{V}_1$ Teiler von $\mathfrak{V}$ sein muß.

Da R für $\mathfrak{H} = 0$ die Form (162) annehmen muß, so muß $\mathfrak{r}_0$ durch $\mathfrak{v}$, also auch durch $\mathfrak{v}_1$ teilbar sein. Wir können wieder, wie oben bei dem Primteiler $\mathfrak{P}$, annehmen, daß $\mathfrak{H}$ den Primteiler $\mathfrak{V}_1$ in voneinander verschiedenen Stellen trifft. Die Zahl dieser Stellen ist wegen (132) $(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{H}) = (\mathfrak{V}_1, \mathfrak{K}_0)$, also größer als Null. Soll $\mathfrak{r}_0$ durch $\mathfrak{v}_1$ teilbar sein, so muß $\mathfrak{R}_0$ durch diese Schnittstellen gehen, woraus $(\mathfrak{V}_1, \mathfrak{R}_0) \geqq (\mathfrak{V}_1, \mathfrak{K}_0)$ folgt, im Widerspruch zu (167). Unsere Annahme, daß der Divisor $\mathfrak{V}\mathfrak{V}_0'$ von 1 verschieden ist, muß daher falsch sein. Er ist gleich 1, und $\mathfrak{R}$ hat die Form

$$R = \frac{\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{K}_0} = \frac{\mathfrak{V}_0\mathfrak{R}_0}{\mathfrak{V}_0\mathfrak{K}_0} = \frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{K}}, \tag{168}$$

wo $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_0$ ganze Divisoren sind. Daß $\mathfrak{R}$ durch $\mathfrak{V}_0$ teilbar ist, ist nichts Auffallendes, da ja $\mathfrak{V}_0$ Teiler aller adjungierten Klassen ist, also auch der kanonischen Klasse $(\mathfrak{K})$, wenn diese ganze Divisoren enthält.

Damit haben wir bewiesen:

Es sei $\mathfrak{H}$ ein Primteiler ohne Besonderheiten der Klasse $(\mathfrak{K}_0\,\mathfrak{L}^\lambda\,\mathfrak{M}^\mu)$, und es bedeute $\mathfrak{k}$ den Divisor, in den der Divisor $\mathfrak{K} = \mathfrak{Z}\mathfrak{L}^{-2}\mathfrak{M}^{-2}$ für $\mathfrak{H} = 0$ übergeht. Sind α und β genügend groß gewählt, so gilt: Ist $\mathfrak{r}$ ein ganzer Divisor der Klasse $(\mathfrak{k})$, so gibt es in K eine Funktion R der Form $\mathfrak{R}_0/\mathfrak{K}_0 = \mathfrak{R}/\mathfrak{K}$, wo $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}$ ganze Divisoren sind, die für $\mathfrak{H} = 0$ in $\mathfrak{r}/\mathfrak{k}$ übergeht.

Da wegen $(\mathfrak{V}_0, \mathfrak{H}) = 0$ für $\mathfrak{H} = 0$ der Divisor $\mathfrak{V}_0$ zu 1 wird, so wird außer $\mathfrak{K}$ auch $\mathfrak{K}_0$ zu $\mathfrak{k}$, so daß $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R}_0$ in $\mathfrak{r}$ übergehen. Wir haben also:

Ist $\mathfrak{r}$ ein ganzer Divisor der Klasse $(\mathfrak{k})$, in die die Klasse $(\mathfrak{K})$ für $\mathfrak{H} = 0$ übergeht, so gibt es in $(\mathfrak{K}_0)$ und $(\mathfrak{K})$ ganze Divisoren $\mathfrak{R}_0$ und $\mathfrak{R}$, die für $\mathfrak{H} = 0$ zu $\mathfrak{r}$ werden. Das heißt aber, es ist

$$\omega_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{K}_0) = \omega_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{K}) = 0. \tag{169}$$

8. *Eine Verallgemeinerung.*

Es sei $p_g = \{\mathfrak{K}\} > 0$. Die ganzen Divisoren aus $(\mathfrak{K})$ können einen Punktdivisor gemeinsam haben, der mit $\mathfrak{V}$ bezeichnet sei. Der ganze Divisor $\mathfrak{G}_0$ aus $(\mathfrak{K})$ zerfalle in die beiden ganzen Divisoren $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$, und zwar habe $\mathfrak{S}$ die Form $\mathfrak{V}^*\,\mathfrak{Q}$, wo $\mathfrak{V}^*$ ein Teiler von $\mathfrak{V}$ ist und $\mathfrak{Q}$ keinen Punktprimteiler enthält. Dann ist $\omega_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{T}) = 0$.

Es seien $\mathfrak{G}_i$ für $i = 1, 2, \ldots, p_g$ linear unabhängige ganze Divisoren aus $(\mathfrak{K})$. Für $\mathfrak{H} = 0$ gehe $\mathfrak{G}_i$ in $\mathfrak{g}_i$ über, ferner $\mathfrak{T}$ in $\mathfrak{t}_0$ und $\mathfrak{S}$ in $\mathfrak{s}_0 = \mathfrak{v}^*\,\mathfrak{q}_0$. Ist $\mathfrak{t}$ irgendein ganzer Divisor

der Klasse $(\mathfrak{t}_0)$, also der Klasse, in die $(\mathfrak{T})$ für $\mathfrak{H} = 0$ übergeht, so ist $\int_0 \mathfrak{t}$ ein ganzer Divisor der Klasse $(\mathfrak{f})$, in die $(\mathfrak{K})$ für $\mathfrak{H} = 0$ übergeht, läßt sich also wegen $\omega_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{K}) = 0$ in der Form darstellen

$$\int_0 \mathfrak{t} = c_1 \mathfrak{g}_1 + c_2 \mathfrak{g}_2 + \cdots + c_p \mathfrak{g}_p,$$

wo die c_i konstant sind. Der Divisor

$$\mathfrak{G} = c_1 \mathfrak{G}_1 + c_2 \mathfrak{G}_2 + \cdots + c_p \mathfrak{G}_p$$

ist dann ein ganzer Divisor aus $(\mathfrak{K})$ mit der Eigenschaft, daß $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}_0 = \mathfrak{G}/\mathfrak{V}^*\mathfrak{Q}$ für $\mathfrak{H} = 0$ in den ganzen Divisor $\mathfrak{t}$ übergeht. Nach einer in der vorigen Nr. wiederholt benutzten Schlußweise folgt, daß $\mathfrak{G}$ durch $\mathfrak{Q}$ teilbar ist. Da $\mathfrak{G}$ von selbst den Faktor $\mathfrak{V}$ und also auch $\mathfrak{V}^*$ enthält, so ist $\mathfrak{G}/\mathfrak{S}_0$ ein ganzer Divisor aus $(\mathfrak{T})$, der für $\mathfrak{H} = 0$ zu $\mathfrak{t}$ wird. Das ist aber die Behauptung.

9. *Ein Hilfssatz.*

Es gibt immer Primteiler, die von allen anderen Primteilern geschnitten werden.

Wenn keine Punktprimteiler vorhanden sind, so hat jeder Primteiler $\mathfrak{A}$, der zu $\mathfrak{L}^\lambda \mathfrak{M}^\mu$, $(\lambda > 0, \mu > 0)$, äquivalent ist, die gewünschte Eigenschaft. Sind aber Punktprimteiler vorhanden, so gilt das nicht mehr, da diese von derartigen Primteilern nicht getroffen werden. Die Anzahl r der Punktprimteiler ist endlich. Es sei $r \geqq 2$. Der Fall $r = 1$ ist trivial, wie sich weiter unten ergibt. Sie seien bezeichnet mit $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \ldots, \mathfrak{V}_r$. Es sei B_i eine Funktion aus K, die für $\mathfrak{V}_i = 0$ nicht konstant wird, und C_i eine Funktion, die $\mathfrak{V}_i$ weder im Zähler noch im Nenner enthält, während sie längs aller anderen Punktprimteiler verschwindet. Ist dann die positive ganze Zahl γ genügend groß, so ist $T_i = B_i C_i^\gamma$ eine Funktion aus K, die für $\mathfrak{V}_i = 0$ nicht konstant wird, während sie Null wird für $\mathfrak{V}_k = 0$, wenn $k \neq i$. Der Hauptnenner der T_i sei $\mathfrak{T}$, und es sei $T_i = \mathfrak{T}_i/\mathfrak{T}$. Wegen der großen Willkür, die bei der Wahl der Funktionen B_i und C_i vorhanden ist, können wir annehmen, daß die ganzen Divisoren $\mathfrak{T}_i$ keinen gemeinsamen Faktor haben. Es seien ferner A_i für $i = 1, 2, \ldots, r$ ganze rationale Funktionen von x, y ohne gemeinsamen Teiler und ohne gemeinsame Nullstellen von demselben Grade (λ, μ). Die Zähler $\mathfrak{A}_i$ der A_i seien Primteiler, also vor allem durch keinen der Primteiler $\mathfrak{V}_k$ teilbar. Wir setzen

$$\mathfrak{C} = c_1 \mathfrak{A}_1 \mathfrak{T}_1 + c_2 \mathfrak{A}_2 \mathfrak{T}_2 + \cdots + c_r \mathfrak{A}_r \mathfrak{T}_r,$$

wo die c_i konstant sein sollen. Es ist dann bei passender Wahl der c_i, und wenn λ und μ genügend groß gewählt werden, $\mathfrak{C}$ ein Primteiler. Ferner ist $\mathfrak{C} \sim \mathfrak{T}\mathfrak{L}^\lambda \mathfrak{M}^\mu$, und die Funktion $\mathfrak{C}/\mathfrak{T}\mathfrak{L}^\lambda \mathfrak{M}^\mu$ wird für $\mathfrak{V}_i = 0$ nicht konstant, so daß für $\mathfrak{V}_i = 0$ der Primteiler $\mathfrak{C}$ nicht in 1 übergehen kann. Es ist also $(\mathfrak{C}, \mathfrak{V}_i) > 0$. Da für jeden Kurvenprimteiler $\mathfrak{P}$ mindestens eine der beiden Zahlen $(\mathfrak{P}, \mathfrak{L})$ und $(\mathfrak{P}, \mathfrak{M})$ größer als Null ist, so ist auch immer $(\mathfrak{C}, \mathfrak{P}) > 0$, wenn nur λ und μ genügend groß gewählt sind. Es ist also $\mathfrak{C}$ ein Primteiler der verlangten Art.

Wenn die Primteiler $\mathfrak{V}_i$ alle zu verschiedenen Stellen gehören, wenn z. B. $r = 1$ ist, so ist ein Primteiler $\mathfrak{C}$, der von allen anderen Primteilern geschnitten wird, in folgender einfacheren Art zu finden. Es sei nämlich A eine ganze rationale unzerlegbare Funktion von x, y, die an den Stellen, die Projektionen der $\mathfrak{V}_i$ sind, verschwindet, so daß der Zähler $\mathfrak{A}$ von A durch alle $\mathfrak{V}_i$ teilbar ist. Es sei

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{V}_1^{\alpha_1} \mathfrak{V}_2^{\alpha_2} \ldots \mathfrak{V}_r^{\alpha_r} \mathfrak{C}. \tag{170}$$

Wählen wir den Grad (λ, μ) von A genügend groß, so können wir $\mathfrak{C}$ als Primteiler annehmen. Da die $\mathfrak{V}_k$ alle zu verschiedenen Stellen gehören, so ist $(\mathfrak{V}_i, \mathfrak{V}_i) < 0$, $(\mathfrak{V}_i, \mathfrak{V}_k) = 0$ für $i \neq k$. Aus (170) folgt daher wegen $(\mathfrak{V}_i, \mathfrak{A}) = 0$, daß $(\mathfrak{V}_i, \mathfrak{C}) > 0$. Ist ferner $\mathfrak{P}$ irgendein Kurvenprimteiler, der von $\mathfrak{C}$ verschieden ist, so ist jedenfalls $(\mathfrak{P}, \mathfrak{C}) \geqq 0$. Wählen wir also den Grad von A gleich $(\lambda + 1, \mu + 1)$, ohne sonst etwas zu ändern, so wird $(\mathfrak{P}, \mathfrak{C}) \geqq (\mathfrak{P}, \mathfrak{L}\mathfrak{M}) > 0$.

10. *Eine zweite Verallgemeinerung des Satzes aus Nr. 7.*

Es sei $(\mathfrak{Q})$ *irgendeine Klasse von K. Ferner sei* $\mathfrak{C}$ *ein Primteiler, der jeden anderen Primteiler trifft, und* $\mathfrak{G}$ *ein Primteiler der Klasse* $(\mathfrak{C}^\alpha)$ *ohne mehrfache Stellen. Dann ist für genügend großes* α $\omega_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{Q}) = 0$.

Es sei ζ ein Fundamentalsystem für die Vielfachen von $1/\mathfrak{Q}$. Für $\mathfrak{G} = 0$ gehe $\mathfrak{Q}$ in $\mathfrak{q}$ über. Ist $\mathfrak{t}$ ein ganzer Divisor aus $(\mathfrak{q})$, so läßt sich die Funktion $\mathfrak{t}/\mathfrak{q}$ des Körpers $\mathfrak{G}$ in der Form

$$\frac{\mathfrak{t}}{\mathfrak{q}} = g_1\zeta_1 + g_2\zeta_2 + \cdots + g_n\zeta_n \tag{171}$$

darstellen, wo die g_i rationale Funktionen von x, y sind. Analog wie in den Nrn. 1 bis 6 dieses Abschnittes läßt sich zeigen, daß es eine ganze rationale Funktion U von x, y gibt, deren Grad nicht von α abhängt, so daß die Funktionen Ug_i sich als ganze rationale Funktionen von x, y darstellen lassen. Es tritt nur an die Stelle von $\mathfrak{Z}$ der Divisor $\mathfrak{Q}$. Ebenso folgt weiter, daß die Funktion

$$R = g_1\zeta_1 + g_2\zeta_2 + \cdots + g_n\zeta_n \tag{172}$$

als Funktion aus K die Form hat

$$R = \frac{\mathfrak{T}_0}{\mathfrak{Q}\mathfrak{V}\mathfrak{U}\mathfrak{L}^\varrho\mathfrak{M}^\sigma} = \frac{\mathfrak{T}_0}{\mathfrak{Q}\mathfrak{U}_0}. \tag{173}$$

Dabei ist $\mathfrak{T}_0$ ein ganzer Divisor, $\mathfrak{V}$ ein ganzer Punktdivisor, $\mathfrak{U}$ der Zähler von $U(x, y)$. Ferner sind ϱ und σ ganze, nicht negative Zahlen, die von α unabhängig sind, und $\mathfrak{U}_0$ ist zur Abkürzung eingeführt.

Für $\mathfrak{G} = 0$ mögen $\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{U}_0$ in $\mathfrak{t}_0$ und $\mathfrak{u}_0$ übergehen. Wegen (171) und (172) geht R für $\mathfrak{G} = 0$ in $\mathfrak{t}/\mathfrak{q}$ über und wegen (173) in $\mathfrak{t}_0/\mathfrak{q}\mathfrak{u}_0$. Es muß daher $\mathfrak{t}_0$ durch $\mathfrak{u}_0$ teilbar sein. Wir können annehmen, daß $\mathfrak{T}_0$ und $\mathfrak{U}_0$ teilerfremd sind, und beweisen, daß dann $\mathfrak{U}_0$ gleich 1 ist. Es sei nämlich $\mathfrak{P}$ ein in $\mathfrak{U}_0$ enthaltener Primteiler. Er gehe für $\mathfrak{G} = 0$ in $\mathfrak{p}$ über. Da $\mathfrak{t}_0$ durch $\mathfrak{p}$ teilbar sein muß, so geht $\mathfrak{T}_0$ durch die Schnittpunkte von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{P}$. Da die ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{G}) = (\mathfrak{C}^\alpha)$ keine festen Schnittpunkte haben, so können wir $\mathfrak{G}$ so gewählt annehmen, daß die Schnittpunkte von $\mathfrak{G}$ mit $\mathfrak{P}$ einfach sind. Dann folgt, daß

$$(\mathfrak{P}, \mathfrak{T}) \geqq (\mathfrak{P}, \mathfrak{G}) = \alpha(\mathfrak{P}, \mathfrak{C}).$$

Da aber $(\mathfrak{P}, \mathfrak{C}) > 0$ und da $(\mathfrak{P}, \mathfrak{T})$ von α unabhängig ist, so ergibt sich ein Widerspruch, wenn wir nur α genügend groß wählen. Es ist also $\mathfrak{U}_0 = 1$ und nach (173) $R = \mathfrak{T}_0/\mathfrak{Q}$, so daß $\mathfrak{T}_0$ ein ganzer Divisor der Klasse $(\mathfrak{Q})$ ist, der in den beliebig gegebenen ganzen Divisor $\mathfrak{t}$ der Klasse $(\mathfrak{q})$ übergeht, wenn $\mathfrak{G} = 0$ gesetzt wird. D. h. aber, es ist, wie behauptet, $\omega_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{Q}) = 0$.

11. *Folgerungen.*

Aus (17) in I, Nr. 4 ergibt sich für $\mathfrak{T} = 1$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{H}$

$$[\mathfrak{H}] = [1] - \omega_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{H}) + \omega_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{K}). \tag{174}$$

Nach (110) und (131) ist $[\mathfrak{H}] = [\mathfrak{K}_0\mathfrak{A}] = p_a + 1$. Ferner ist nach (16) in I, Nr. 4 $[1] = 1 + \{\mathfrak{K}\} = 1 + p_g$, wo p_g das geometrische Geschlecht von K ist. In Verbindung mit (169) folgt daher aus (174)

$$\omega_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{H}) = p_g - p_a. \tag{175}$$

Es sei $\mathfrak{C}$ ein Primteiler ohne mehrfache Stellen, und es sei die Dimension $\{\mathfrak{C}\}$ der Klasse $(\mathfrak{C})$ mindestens gleich 2. Zur Abkürzung sei $\omega_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{C}) = \delta$ gesetzt. Nach einem Satze von Severi gibt es dann ∞^δ Klassen, die für $\mathfrak{C} = 0$ alle in die Klasse übergehen, in die $(\mathfrak{C})$ für $\mathfrak{C} = 0$ übergeht. Diese Klassen sind eindeutig den Stellen eines algebraischen Körpers V von δ unabhängigen Veränderlichen zugeordnet, der sogenannten Picardschen

Mannigfaltigkeit. Es ist V auch ein Körper Abelscher Funktionen von δ Veränderlichen. Jeder dieser Veränderlichen kann man ein einfaches Integral erster Gattung des Körpers K zuordnen, und diese sind linear unabhängig. Die Anzahl π der zu K gehörenden l. u. einfachen Integrale ist daher mindestens $\delta = \omega_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{C})$. Wählen wir im besonderen $\mathfrak{C} = \mathfrak{H}$, so folgt wegen (175)

$$\pi \geqq p_g - p_a, \tag{176}$$

eine Ungleichheit, die wir in I, Nr. 9 benutzt haben, um zu beweisen, daß in ihr das Gleichheitszeichen steht.

Es ist also auch $\omega_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{C}) \leqq p_g - p_a$, wofür wir weiter unten in Nr. 13 noch einen anderen Beweis kennenlernen werden.

12. *Zwei Sätze über* $\tau(\mathfrak{Q})$.

In I, Nr. 7 haben wir das Symbol $\tau(\mathfrak{Q})$ definiert. Danach ändert sich $\tau(\mathfrak{Q})$ nicht, wenn man $\mathfrak{Q}$ durch einen äquivalenten Divisor ersetzt oder durch $\mathfrak{Q}\mathfrak{A}$, wo $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\mu}$. Ferner ist nach II, Nr. 3

$$\tau(\mathfrak{Q}) \leqq \tau(\mathfrak{Q}/\mathfrak{C}), \quad \tau(\mathfrak{K}) \leqq \tau(\mathfrak{K}/\mathfrak{G}), \tag{177}$$

wenn $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{G}$ ganze Divisoren sind, und zwar $\mathfrak{C}$ ohne Punktprimteiler.

Wir beweisen:

1. *Für jede Klasse* $(\mathfrak{T})$ *ist* $\tau(\mathfrak{T}) \geqq p_a + 1$.

2. *Enthält die Klasse* $(\mathfrak{T})$ *selbst einen ganzen Divisor ohne Punktprimteiler oder gibt es ganze nicht negative Zahlen* λ_0, μ_0 *so, daß die Klasse* $(\mathfrak{T}\mathfrak{L}^{\lambda_0}\mathfrak{M}^{\mu_0}) = (\mathfrak{T}\mathfrak{A}_0)$ *einen derartigen ganzen Divisor* $\mathfrak{T}_0$ *enthält, so ist* $\tau(\mathfrak{K}\mathfrak{T}) = p_a + 1 = \tau(\mathfrak{K}_0\mathfrak{T})$.

Es seien die ganzen nicht negativen Zahlen λ_0, μ_0 so gewählt, daß die Klasse $(\mathfrak{T}\mathfrak{L}^{\lambda_0}\mathfrak{M}^{\mu_0}) = (\mathfrak{T}\mathfrak{A}_0)$ einen ganzen Divisor $\mathfrak{T}_0$ enthält. Das geht immer, wenn nur λ_0 und μ_0 genügend groß sind. Zunächst kann $\mathfrak{T}_0$ auch Punktprimteiler enthalten. Es sei ferner $\mathfrak{A}$ ein ganzer Divisor der Klasse $(\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\mu})$, der durch $\mathfrak{T}_0$ teilbar ist. Einen solchen gibt es sicher, wenn λ und μ genügend groß sind. Es sei etwa

$$\mathfrak{T}_0\mathfrak{T}^* = \mathfrak{A}.$$

Unter Benutzung von (39), (131) und der oben angegebenen Eigenschaften von $\tau(\mathfrak{Q})$ ergibt sich, wenn $(\mathfrak{H})$ ein Primteiler aus $(\mathfrak{K}_0\mathfrak{A})$ ist,

$$p_a + 1 = \tau(\mathfrak{K}_0) = \tau(\mathfrak{K}_0\mathfrak{A}) \leqq \tau(\mathfrak{K}_0\mathfrak{A}/\mathfrak{T}^*) = \tau(\mathfrak{K}_0\mathfrak{T}_0) = \tau(\mathfrak{K}_0\mathfrak{A}\mathfrak{T}_0) = \tau(\mathfrak{H}\mathfrak{T}_0) \leqq \tau(\mathfrak{T}_0).$$

Da aber $\tau(\mathfrak{T}_0) = \tau(\mathfrak{T}\mathfrak{A}_0) = \tau(\mathfrak{T})$, so ist der erste Satz bewiesen.

Es enthalte jetzt $\mathfrak{T}_0$ keinen Punktprimteiler. Dann ist

$$p_a + 1 = \tau(\mathfrak{K}\mathfrak{A}) \leqq \tau(\mathfrak{K}\mathfrak{A}/\mathfrak{T}^*) = \tau(\mathfrak{K}\mathfrak{T}_0) \leqq \tau(\mathfrak{K}) = p_a + 1$$

und, wenn $\mathfrak{V}_0$ den Teiler der adjungierten Klassen bedeutet (II, Nr. 4),

$$p_a + 1 = \tau(\mathfrak{K}\mathfrak{A}) \leqq \tau(\mathfrak{K}\mathfrak{A}/\mathfrak{V}_0\mathfrak{T}^*) = \tau(\mathfrak{K}_0\mathfrak{T}_0) \leqq \tau(\mathfrak{K}_0) = p_a + 1.$$

Da aber $\tau(\mathfrak{K}\mathfrak{T}_0) = \tau(\mathfrak{K}\mathfrak{T})$ und $\tau(\mathfrak{K}_0\mathfrak{T}_0) = \tau(\mathfrak{K}_0\mathfrak{T})$, so folgt die Behauptung des zweiten Satzes.

Wir beweisen noch:

Es sei $\mathfrak{G}$ *ein Kurvenprimteiler, dessen Divisor der mehrfachen Stellen die Ordnung* 2σ *hat. Ferner sei* $(\mathfrak{H}) = (\mathfrak{K}_0\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\mu})$. *Dann ist bei genügend großem* λ *und* μ

$$\omega'_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G}\mathfrak{H}) = \sigma, \tag{178}$$

wo der Strich an ω *daran erinnern soll, daß der Defekt in bezug auf den speziellen Primteiler* $\mathfrak{G}$ *genommen werden soll und nicht in bezug auf irgendeinen zu ihm äquivalenten. Im besonderen ist*

$$\omega_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{H}^{\alpha}) = 0 \quad \textit{für} \quad \alpha \geqq 2. \tag{179}$$

Zum Beweise wählen wir λ und μ so groß, daß $(\mathfrak{G}, \mathfrak{H}') = (\mathfrak{G}, \mathfrak{K}/\mathfrak{H})$ kleiner ist als Null, so daß die Klasse, in die $(\mathfrak{H}')$ für $\mathfrak{G} = 0$ übergeht, keinen ganzen Divisor enthalten

kann. Es ist dann $\omega_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{H}') = \delta(\mathfrak{H}') = 0$, und die Gleichung (68) ergibt für $\mathfrak{T} = \mathfrak{H}$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{G}$

$$[\mathfrak{G}\mathfrak{H}] = [\mathfrak{K}_0\mathfrak{G}\mathfrak{A}] = [\mathfrak{H}] - \omega_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G}\mathfrak{H}) + \sigma.$$

Da aber, wie wir im Anfang dieser Nummer gesehen haben, $[\mathfrak{H}] = \tau(\mathfrak{K}_0) = p_a + 1$ und ebenso $[\mathfrak{G}\mathfrak{H}] = \tau(\mathfrak{K}_0\mathfrak{G}) = p_a + 1$, so folgt die Behauptung (178). Wählen wir im besonderen $\mathfrak{G} \sim \mathfrak{H}^{\alpha-1}$ und $\alpha \geqq 2$, so folgt (179), da für einen nicht speziell gewählten ganzen Divisor aus $(\mathfrak{H})$ die Zahl σ gleich 0 ist.

13. *Über den Defekt einer Klasse in bezug auf einen ihrer Primteiler.*

Es sei $\mathfrak{G}$ ein Kurvenprimteiler, dessen Divisor der mehrfachen Stellen die Ordnung 2σ hat. Es ist dann

$$\omega'_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G}) \leqq p_g - p_a + \sigma = \pi + \sigma. \tag{180}$$

Der folgende Beweis stammt von Castelnuovo. Es sei $(\mathfrak{H})$ ein Primteiler aus $(\mathfrak{K}_0\mathfrak{A}) = (\mathfrak{K}_0\mathfrak{L}^{\lambda}\mathfrak{M}^{\mu})$, so daß (178) besteht. Wir können annehmen, daß $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ nur einfache Schnittpunkte haben, da die ganzen Divisoren aus $(\mathfrak{H})$ keine festen Schnittpunkte haben. Wir setzen

$$\varepsilon_{\mathfrak{G}} = \{\mathfrak{G}\mathfrak{H}\} - \{\mathfrak{H}\} - \{\mathfrak{G}\}_{\mathfrak{G}}, \quad \varepsilon_{\mathfrak{H}} = \{\mathfrak{G}\mathfrak{H}\} - \{\mathfrak{G}\} - \{\mathfrak{H}\}_{\mathfrak{H}}, \tag{181}$$

wobei unter $\{\mathfrak{T}\}_{\mathfrak{P}}$ die Dimension der Klasse verstanden werden soll, in die $(\mathfrak{T})$ für $\mathfrak{P} = 0$ übergeht. Zufolge der Definition des Defektes bestehen die Gleichungen

$$\{\mathfrak{G}\} = \{1\} + \{\mathfrak{G}\}_{\mathfrak{G}} - \omega_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G}), \quad \{\mathfrak{H}\} = \{1\} + \{\mathfrak{H}\}_{\mathfrak{H}} - \omega_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{H}),$$

aus denen durch Subtraktion in Verbindung mit (181) folgt

$$\varepsilon_{\mathfrak{G}} - \varepsilon_{\mathfrak{H}} = \omega_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{H}) - \omega_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G}). \tag{182}$$

Es sei ε die Zahl der Bedingungen dafür, daß ein ganzer Divisor der Klasse $(\mathfrak{G}\mathfrak{H})$ durch die Schnittpunkte von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ geht. Ferner sei $\mathfrak{g}$ der Divisor, in den $\mathfrak{G}$ für $\mathfrak{H} = 0$ übergeht. Für $\mathfrak{H} = 0$ gehen diejenigen ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{G}\mathfrak{H})$, die durch die Schnittpunkte von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{H}$ gehen, in durch $\mathfrak{g}$ teilbare ganze Divisoren der Klasse $(\mathfrak{G}\mathfrak{H})_{\mathfrak{H}}$ über. Die Zahl der linear unabhängigen dieser Divisoren, die wir auf diese Art bekommen, ist $\{\mathfrak{G}\mathfrak{H}\} - \{\mathfrak{G}\} - \varepsilon$, während die Gesamtzahl der l. u. $\{\mathfrak{H}\}_{\mathfrak{H}}$ ist. Die Zahl der fehlenden kann höchstens gleich der Zahl der l. u. ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{G}\mathfrak{H})_{\mathfrak{H}}$ sein, die *nicht* aus ganzen Divisoren der Klasse $(\mathfrak{G}\mathfrak{H})$ für $\mathfrak{H} = 0$ hervorgehen, also gleich $\omega_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{G}\mathfrak{H})$. Daher haben wir

$$\{\mathfrak{H}\}_{\mathfrak{H}} = \{\mathfrak{G}\mathfrak{H}\} - \{\mathfrak{G}\} - \varepsilon + \delta_{\mathfrak{H}}, \text{ wo } 0 \leqq \delta_{\mathfrak{H}} \leqq \omega_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{G}\mathfrak{H}).$$

Mit (181) folgt hieraus

$$\varepsilon_{\mathfrak{H}} = \varepsilon - \delta_{\mathfrak{H}}, \quad 0 \leqq \delta_{\mathfrak{H}} \leqq \omega_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{G}\mathfrak{H}). \tag{183}$$

Analog ergibt sich

$$\varepsilon_{\mathfrak{G}} = \varepsilon - \delta_{\mathfrak{G}}, \quad 0 \leqq \delta_{\mathfrak{G}} \leqq \omega_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G}\mathfrak{H}). \tag{184}$$

Aus (182) bis (184) folgt

$$\omega_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{G}) - \delta_{\mathfrak{G}} = \omega_{\mathfrak{H}}(\mathfrak{H}) - \delta_{\mathfrak{H}}. \tag{185}$$

Wegen (175) und (178) ergibt sich hieraus die Behauptung (179).

14. *Der Riemann-Rochsche Satz.*

Wir können jetzt den Riemann-Rochschen Satz beweisen:

Für jede Klasse $(\mathfrak{Q})$ ist

$$[\mathfrak{Q}] \geqq p_a + 1. \tag{186}$$

Wegen der Bedeutung von $[\mathfrak{Q}]$ [vgl. (16)] ist auch

$$\{\mathfrak{Q}\} + \{\mathfrak{Q}'\} + \tfrac{1}{2}(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}') \geqq p_a + 1 \tag{187}$$

wenn $(\mathfrak{Q}') = (\mathfrak{K}/\mathfrak{Q})$ die Ergänzungsklasse von $(\mathfrak{Q})$ ist. Bezeichnen wir den Grad $(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q})$ von $(\mathfrak{Q})$ mit ν und das Geschlecht $1 + \frac{1}{2}(\mathfrak{Q}, \mathfrak{Q}\mathfrak{K})$ der Klasse $(\mathfrak{Q})$ mit ϱ, so haben wir auch

$$\{\mathfrak{Q}\} + \{\mathfrak{Q}'\} \geqq \nu - \varrho + p_a + 2. \tag{188}$$

Es sei $\mathfrak{C}$ ein Primteiler, der von allen anderen Primteilern geschnitten wird. (Vgl. Nr. 9 dieses Abschnittes.) Zur Abkürzung sei gesetzt

$$(\mathfrak{Q}', \mathfrak{L}) = q_1', \quad (\mathfrak{Q}', \mathfrak{M}) = q_2', \quad (\mathfrak{C}, \mathfrak{L}) = c_1, \quad (\mathfrak{C}, \mathfrak{M}) = c_2. \tag{189}$$

Ferner sei $\mathfrak{G}$ ein Primteiler der Klasse $(\mathfrak{C}^\alpha)$ ohne mehrfache Stellen, und zwar sei α so groß gewählt, daß

$$q_1' - \alpha c_1 < 0, \quad q_2' - \alpha c_2 < 0 \tag{190}$$

und daß

$$\omega_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{Q}) = 0, \tag{191}$$

was nach Nr. 9 zu erreichen ist. Schließlich sei $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{L}^\lambda \mathfrak{M}^\mu$, und λ und μ seien so groß, daß $[\mathfrak{Q}\mathfrak{G}\mathfrak{A}] = \tau(\mathfrak{Q}\mathfrak{G})$.

Wir setzen $\mathfrak{Q}\mathfrak{G} = \mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}' = \mathfrak{K}/\mathfrak{Q}\mathfrak{G} = \mathfrak{Q}'/\mathfrak{G} \sim \mathfrak{Q}'/\mathfrak{C}^\alpha$, so daß $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{T}'$ Ergänzungsdivisoren voneinander sind. Wegen (190) wird

$$(\mathfrak{T}', \mathfrak{A}) = \lambda(q_1' - \alpha c_1) + \mu(q_2' - \alpha c_2) < 0,$$

so daß nach dem Satz am Schluß von I, Nr. 10 und dem ersten Satz in III, Nr. 12

$$p_a + 1 \leqq \tau(\mathfrak{Q}\mathfrak{G}) = [\mathfrak{Q}\mathfrak{G}\mathfrak{A}] \leqq [\mathfrak{Q}\mathfrak{G}]. \tag{192}$$

Ferner ergibt sich aus (17) für $\mathfrak{T} = \mathfrak{Q}$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{G}$ unter Beachtung von (191)

$$[\mathfrak{Q}\mathfrak{G}] = [\mathfrak{Q}] - \omega_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{Q}\mathfrak{G}), \tag{193}$$

also

$$[\mathfrak{Q}\mathfrak{G}] \leqq [\mathfrak{Q}],$$

woraus sich in Verbindung mit (192) die Behauptung $[\mathfrak{Q}] \geqq p_a + 1$ ergibt.

15. *Reguläre Klassen.*

Wir wollen eine Klasse *regulär* nennen, wenn ihre Dimension mindestens gleich 2 ist und wenn ihre ganzen Divisoren keinen gemeinsamen Teiler und keine festen mehrfachen Stellen haben. Ferner heißt die Klasse $(\mathfrak{K}\mathfrak{T})$ die zu $(\mathfrak{T})$ *adjungierte Klasse* und soll mit $(\overline{\mathfrak{T}})$ bezeichnet werden.

Es sei $(\mathfrak{G})$ eine reguläre Klasse, $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ seien zwei ihrer ganzen Divisoren ohne gemeinsamen Teiler und ohne mehrfache Stellen. Wir führen durch $x' = \mathfrak{G}_1/\mathfrak{G}_2$ eine neue unabhängige Veränderliche x' an Stelle von x ein. Damit x' überall bestimmte Werte annimmt, müssen wir die Definition derjenigen Stellen abändern, wo $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ einander schneiden. Dadurch gehen Primteiler zweiter in solche erster Art über. Es sind das die sogenannten ausgezeichneten Primteiler der Transformation. Bezeichnen wir Zähler und Nenner von x' mit $\mathfrak{L}_0'$ und $\mathfrak{L}'$, so wird

$$\mathfrak{G}_1 = \mathfrak{B}\mathfrak{L}_0', \qquad \mathfrak{G}_2 = \mathfrak{B}\mathfrak{L}', \tag{194}$$

wo $\mathfrak{B}$ ein ganzer Divisor ist, der nur aus ausgezeichneten Primteilern besteht. Ist ferner $(\mathfrak{K}')$ die kanonische Klasse nach der Transformation, so ist, da $\mathfrak{G}_1$ und $\mathfrak{G}_2$ keine mehrfachen Stellen haben, $(\mathfrak{K}') = (\mathfrak{B}\mathfrak{K})$, wo $\mathfrak{B}$ derselbe Divisor ist wie in (194) [4]). Daher ist

$$(\mathfrak{K}\mathfrak{G}) = (\mathfrak{K}'\mathfrak{L}'), \quad [\mathfrak{K}\mathfrak{G}] = [\mathfrak{K}'\mathfrak{L}'].$$

In (17) wählen wir $\mathfrak{T} = \mathfrak{K}'$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{L}'$ und erhalten

$$[\mathfrak{K}\mathfrak{G}] = [\mathfrak{K}'\mathfrak{L}'] = p_g + 1 - \omega_{\mathfrak{L}'}(\mathfrak{K}'\mathfrak{L}') + \omega_{\mathfrak{L}'}(1). \tag{195}$$

Wir verwenden die Ergebnisse von I, Nr. 8 und 9. Es sei der Unterkörper K' von K, der die Funktionen umfaßt, die nur von x' abhängen, vom Geschlechte p' und vom Grade

[4]) Kap. I.

n' über dem Körper der rationalen Funktionen von x'. Mit anderen Worten: es mögen die Kurven des Büschels $c_1\mathfrak{G}_1 + c_2\mathfrak{G}_2$ in n' Kurven eines Büschels vom Geschlechte p' zerfallen. Es sei ferner w die Verzweigungszahl von K' in bezug auf x', so daß

$$\tfrac{1}{2}w = p' + n' - 1.$$

Nach (49), (55) ist

$$\omega_{\mathfrak{L}'}(1) = n' - 1, \quad \omega_{\mathfrak{L}'}(\mathfrak{R}'\mathfrak{L}') = \omega_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{R}\mathfrak{G}) = p_g - p_a - p',$$

so daß aus (195) folgt:

Ist $(\mathfrak{G})$ *eine reguläre Klasse, deren ganze Divisoren in* n' *Primteiler eines Büschels vom Geschlechte* p' *zerfallen, so ist*

$$[\overline{\mathfrak{G}}] = [\mathfrak{G}\mathfrak{R}] = p_a + 1 + p' + n' - 1 = p_a + 1 + \tfrac{1}{2}w, \tag{196}$$

$$\omega_{\mathfrak{G}}(\mathfrak{R}\mathfrak{G}) = p_g - p_a - p'. \tag{197}$$

Es sei $n' = 1$, also $p' = w = 0$, und außerdem sei auch die Klasse $(\overline{\mathfrak{G}})$ regulär. Wir wählen in (17) $\mathfrak{T} = 1$, $\mathfrak{P} = \overline{\mathfrak{G}}$ und erhalten

$$p_a + 1 = [\overline{\mathfrak{G}}] = p_g + 1 - \omega_{\overline{\mathfrak{G}}}(\overline{\mathfrak{G}}) + \omega_{\overline{\mathfrak{G}}}(\mathfrak{R}).$$

Da nach (180) $\omega_{\overline{\mathfrak{G}}}(\overline{\mathfrak{G}}) \leqq p_g - p_a$, so folgt:

Ist $(\mathfrak{G})$ *eine reguläre Klasse, deren ganze Divisoren nicht alle zerfallen, und ist die adjungierte Klasse* $(\overline{\mathfrak{G}}) = (\mathfrak{R}\mathfrak{G})$ *auch regulär, so ist*

$$[\overline{\mathfrak{G}}] = p_a + 1, \quad \omega_{\overline{\mathfrak{G}}}(\overline{\mathfrak{G}}) = p_g - p_a, \quad \omega_{\overline{\mathfrak{G}}}(\mathfrak{R}) = 0. \tag{198}$$

Halle, Saale, Mai 1931; einige Zusätze Januar 1932.

Eingegangen 2. September 1931, ergänzt 2. Februar 1932.

Über gewisse Funktionen, die in der mathematischen Konjunkturforschung eine große Rolle spielen.

Von *Paul Lorenz* in Berlin.

Die Funktionen $X_k(x)$, von denen im folgenden die Rede ist, sind rational und ganz und bis auf eine multiplikative Konstante bestimmt durch die Bedingung

$$\sum_{x=x_1}^{x_N} X_k(x)\, X_l(x) = 0 \qquad \text{für} \quad k \neq l, \tag{1}$$

wobei k bzw. l den Grad der Funktion X_k bzw. X_l in x bedeutet, und x eine gewisse Folge von Werten $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$ durchläuft. Sie sind zuerst von Tschebyscheff im Jahre 1854 in die Literatur eingeführt worden, und er hat sie im Laufe der Jahre nicht weniger als sechsmal behandelt.

Warum die Funktionen X in der Mathematik der Konjunkturforschung eine große Rolle spielen, erhellt aus folgendem. Wirtschaftskurven — nennen wir beispielshalber den Weizenpreis für eine längere Reihe von Jahren — haben fast immer, im Gegensatz zu den meisten physikalischen, chemischen, technischen, auch biologischen Kurven, ein recht zackiges Aussehen. Sie lassen trotzdem in der Regel deutlich eine Grundtendenz erkennen, die sich nur langsam ändert, stetig ansteigt oder fällt oder wellenförmig verläuft aber weder zeichnerisch noch zahlenmäßig gegeben ist. Diese Grundtendenz darzustellen, kann man sich — das ist für den allgemeinen Fall das Nächstliegende — ganzer rationaler Funktionen bedienen. Setzt man die Näherungsfunktion in der Form $y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_k X_k$ an, bezeichnet die Werte der Beobachtungsreihe mit w_x und bedient sich zur Bestimmung der Konstanten $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k$ der Methode der kleinsten Quadratsumme, so muß

$$\sum_{x=x_1}^{x_N} [a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_k X_k - w_x]^2 \tag{2}$$

Minimum sein. Daraus folgt gemäß (1)

$$a_i = \frac{\Sigma w_x X_i}{\Sigma X_i^2}.$$

Hieraus ist ohne weiteres klar, daß es gleichgültig ist, mit wieviel Gliedern die Näherungsfunktion $y = a_0 + a_1 X_1 + a_2 X_2 + \cdots + a_k X_k$ angesetzt worden ist; immer ergeben sich für die Koeffizienten $a_0, a_1, a_2, \ldots$ die gleichen Werte. Das ist ein eminenter Vorteil gegenüber der Annäherung durch eine Funktion der Form

$$y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_k x^k,$$

bei der die Koeffizienten c von dem Grade k der Näherungsfunktion abhängig sind, bei Änderung des Grades derselben also neu berechnet werden müssen. Ein zweiter Vorteil besteht darin, daß man um die Auflösung eines Systems von linearen Gleichungen herumkommt. Da derartige Systeme gegen selbst geringfügig scheinende Änderungen, Ungenauigkeiten und vorzeitige Abrundungen der Gleichungskonstanten unter Umständen sehr empfindlich sind [1]), ist auch der zweite Vorteil oft recht erheblich.

[1]) Vgl. Lorenz „Gegen einen gewissen Mißbrauch mathematischer Formulierungen in der theoretischen Nationalökonomie", Jahrbücher für Nationalökonomie und Statistik **134** (1931), S. 49.

Läßt man die Folge der Werte $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$ vollkommen unbestimmt, so bleibt der Bau der Funktionen X_k sehr kompliziert, und sie sind für Anwendungen wenig tauglich. Das ändert sich jedoch vollständig, wenn man die für die Anwendungen oft zutreffende Voraussetzung macht, daß die $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$ äquidistant sind; insbesondere ergibt sich dann für die Funktionen eine verhältnismäßig einfache explizite Darstellung. Durchläuft x z. B. die Werte $1, 2, 3, \ldots, N$, dann ist nach Tschebyscheff (»Sur l'interpolation des valeurs équidistantes«, Oeuvres T. II. p. 219 . . 242)

$$X_k = c_k \sum_{\lambda=0}^{k} (-1)^\lambda \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(N-\lambda)\Gamma(k+\lambda+1)}{\Gamma^2(\lambda+1)\Gamma(k-\lambda+1)\Gamma(N-k)} \cdot \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x-\lambda)}.$$

Da $\Gamma(y) = (y-1)\Gamma(y-1)$ ist, kann man dafür auch schreiben

$$X_k = c_k k!\, k! \sum_{\lambda=0}^{k} (-1)^\lambda \binom{k+\lambda}{\lambda} \binom{N-1-\lambda}{k-\lambda} \binom{x-1}{\lambda}.$$

Diese Darstellungsweise der Funktionen X ist — ebenso wie eine ähnliche, von Esscher gegebene [2]) — nicht bequem für die Auswertung. Da sich zeigen läßt, daß die Funktionen entweder eine Symmetrieachse oder einen Mittelpunkt besitzen, können sie entweder als Summen von nur geraden oder als Summen von ausschließlich ungeraden Potenzen des Arguments dargestellt werden. Die Zahl der Summanden, aus denen sich eine Funktion aufbaut, reduziert sich dadurch bei den ungeraden Funktionen auf die halbe Anzahl der vorstehenden Darstellung, bei den geraden Funktionen auf die halbe Anzahl plus eins. Anderseits ist es aber unerwünscht, die bequeme und durchsichtige Darstellung mit Hilfe von Binomialkoeffizienten, die zudem der geforderten Äquidistanz der Werte $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_N$ am besten entspricht, fallen zu lassen und durch eine — wenig durchsichtige und unhandliche — Darstellung mit Hilfe von Potenzen zu ersetzen. *Das zu erstrebende Ziel dürfte sein, eine Darstellung mit Hilfe von Binomialkoeffizienten (oder Faktoriellen) zu gewinnen, die daneben die genannten Vorzüge der Potenzdarstellung besitzt.*

Im folgenden soll eine solche Darstellung entwickelt werden. — Sie stellt wahrscheinlich die bequemstmögliche Form für die numerische Auswertung dar, worauf es ja bei den Anwendungen wesentlich ankommt. Um sie zu gewinnen, kann man von der Definition der Funktion $X_k(x)$ durch eine Determinante ausgehen. Wir definieren:

$$(3) \qquad X_k = b_k \cdot \begin{vmatrix} x^0 & x^1 & x^2 & \ldots & x^k \\ \Sigma x^0 & \Sigma x^1 & \Sigma x^2 & \ldots & \Sigma x^k \\ \Sigma x^1 & \Sigma x^2 & \Sigma x^3 & \ldots & \Sigma x^{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \Sigma x^{k-1} & \Sigma x^k & \Sigma x^{k+1} & \ldots & \Sigma x^{2k-1} \end{vmatrix},$$

wobei b_k zunächst eine willkürliche Konstante ist, und die Summen über eine Folge von N äquidistanten Werten des Arguments zu erstrecken sind. Die so definierten Funktionen X_k erfüllen, wie man leicht sieht, die Orthogonalitätsbedingung (1). Über die Konstante b_k kann man verfügen. Wir wollen sie so bestimmen, daß

$$(4) \qquad \frac{1}{N} \sum_{x=x_1}^{x_N} X_k^2 = 1$$

wird und das Glied mit der höchsten Potenz von x in X_k das positive Vorzeichen erhält. Für die weitere Behandlung muß man die Fälle, in denen N ungerade ist, von den Fällen, in denen N gerade ist, scheiden. Ist N ungerade, so lassen wir x die Werte

$$-\frac{N-1}{2}, -\frac{N-3}{2}, \ldots, -1, 0, 1, \ldots, \frac{N-3}{2}, \frac{N-1}{2}$$

[2]) Fredrik Esscher „On graduation according to the method of least squares by means of certain polynomials", Försäkringsaktiebolaget Skandias Festskrift 1930, Stockholm 1930.

durchlaufen, im andern Falle die Werte

$$-(N-1), -(N-3), \ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots, (N-3), (N-1).$$

Die Determinante (3) läßt sich in jedem Falle zerlegen und umformen, und man findet z. B. für ungerades N

$$(5)\quad \begin{aligned} X_{2l+1} &= \Delta^l_{i=0} \frac{(x+i)^{(2i+1)}}{\left(\frac{N+1}{2}+i\right)^{(2i+2)}} \binom{l+i+\frac{1}{2}}{l} \sqrt{\frac{(4l+3)\frac{N}{2}\left(\frac{N+1}{2}+l\right)^{(2l+2)}}{\left(\frac{N}{2}+l\right)^{(2l+1)}}} \\ X_{2l} &= \Delta^l_{i=0} \frac{\left(x-\frac{1}{2}+i\right)^{(2i)}}{\left(\frac{N}{2}+i\right)^{(2i+1)}} \binom{l+i-\frac{1}{2}}{l} \sqrt{\frac{(4l+1)\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}+l\right)^{(2l+1)}}{\left(\frac{N-1}{2}+l\right)^{(2l)}}}. \end{aligned}$$

Dabei soll das Symbol $\Delta^l_{i=0}$ bedeuten, daß man die l-te endliche Differenz nach i des hinter $\Delta^l_{i=0}$ stehenden Ausdrucks formal ansetzen und dann i gleich Null werden lassen soll.

Die Entwicklung der Determinante (3) bis zu den Formeln (5) ist im Sonderheft 21 der „Vierteljahrshefte zur Konjunkturforschung“: Paul Lorenz „Der Trend; ein Beitrag zur Methode seiner Berechnung und seiner Auswertung für die Untersuchung von Wirtschaftskurven und sonstigen Zeitreihen“ (Berlin, Reimar Hobbing, 1931) gegeben. Aber auch die Darstellung (5) ist noch nicht für eine Auswertung und Tabellierung der Funktionen X geeignet, da in ihr Brüche auftreten. Wir gestalten sie daher nochmals um und schreiben:

N ungerade.

$$(6)\quad X_{2l+1} = \left[\Delta^l_{i=0} \binom{x+i}{2i+1} \binom{\frac{N+1}{2}+l}{l-i} \binom{\frac{N-3}{2}-i}{l-i} \frac{\binom{l+i+\frac{1}{2}}{i} 2^{2i+1}}{\binom{l}{i}\binom{l}{i}}\right] \cdot (2l+1)! \sqrt{\frac{4l+3}{(N^2-1^2)(N^2-2^2)\cdots(N^2-[2l+1]^2)}}$$

$$(7)\quad X_{2l} = \left[\left\{\Delta^l_{i=0} \frac{\left(x-\frac{1}{2}+i\right)^{(2i)} 2^{2i}}{\left(i-\frac{1}{2}\right)^{(i)} 2^i} \cdot \left(\frac{N}{2}+l\right)^{(l-i)} 2^{l-i} \cdot \left(\frac{N}{2}-i-1\right)^{(l-i)} 2^{l-i} \cdot \left(l+i-\frac{1}{2}\right)^{(i)} 2^i\right\} : 2^{2l}\, l!\, l!\right] \cdot (2l)! \sqrt{\frac{4l+1}{(N^2-1^2)(N^2-2^2)\cdots(N^2-[2l]^2)}},$$

wobei die Wurzeln mit positivem Vorzeichen zu nehmen sind. Bei dieser Darstellung sind die in den [ ] stehenden Ausdrücke für ganzzahliges Argument ganzzahlig, wie sofort zu zeigen sein wird.

Tschebyscheff hat gezeigt, daß ganze rationale Funktionen $X_k(x)$, wobei k den Grad der Funktion in x anzeigt, und die der Bedingung (1) genügen, bis auf einen willkürlichen Faktor eindeutig bestimmt sind und sich bei ungeradem N auf folgende Art darstellen assen:

$$(8)\qquad X_k = C_k \Delta^k \binom{x-n-1}{k} \binom{x+n}{k}.$$

Dabei ist $n = \frac{N-1}{2}$; der Ursprung des Arguments fällt mit der Mitte des Intervalls,

über welches summiert wird, zusammen, und die Argumentwerte über welche summiert wird, sind äquidistant mit dem Abstand 1. (Tschebyscheff, Oeuvres T. I. p. 546).

Aus

$$(9)\quad \psi_k = \Delta^k \binom{x-n-1}{k}\binom{x+n}{k}$$
$$= \binom{x-n-1+k}{k}\binom{x+n}{0} + \binom{k}{1}\binom{x-n-2+k}{k-1}\binom{x+n}{1}$$
$$+ \binom{k}{2}\binom{x-n-3+k}{k-2}\binom{x+n}{2} + \cdots + \binom{x-n-1}{0}\binom{x+n}{k}$$

ergibt sich, daß die höchste Potenz von x in ψ_k, nämlich x^k, den Koeffizienten $\frac{1}{k!}\binom{2k}{k}$ hat. Ersetzt man k durch $2l+1$, so ist

$$\psi_{2l+1} = \frac{1}{(2l+1)!}\binom{4l+2}{2l+1} x^{2l+1} + \cdots.$$

Anderseits ist in (6) der Koeffizient der höchsten Potenz von x des in der Klammer [ ] stehenden Ausdrucks

$$\frac{1}{(2l+1)!}\binom{2l+\frac{1}{2}}{l}\cdot 2^{2l+1} = \frac{1}{(2l+1)!}\binom{4l+2}{2l+1}.$$

Mithin ist, zunächst nur für ungerades N

$$X_{2l+1} = \psi_{2l+1}\cdot(2l+1)!\sqrt{\frac{4l+3}{(N^2-1^2)(N^2-2^2)\cdots(N^2-[2l+1]^2)}}$$

und analog

$$X_{2l} = \psi_{2l}\cdot(2l)!\sqrt{\frac{4l+1}{(N^2-1^2)(N^2-2^2)\cdots(N^2-[2l]^2)}}.$$

Die Ausdrücke ψ sind gemäß ihrer Definition durch (9) für ganze x ganzzahlig, womit bewiesen ist, daß die in den Gleichungen (6) und (7) in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke für ganzes x ganzzahlig sind. Das aber macht sie für eine numerische Auswertung besonders geeignet.

Ist N gerade, so findet man auf einem dem oben dargelegten durchaus entsprechenden Wege:

$$(10)\quad X_{2l+1} = \left[\left\{\Delta^l_{i=0}\frac{\left(\frac{x}{2}+i\right)^{(2i+1)}2^{2i+1}}{\left(i+\frac{1}{2}\right)^{(i)}2^i}\cdot\left(\frac{N+1}{2}+l\right)^{(l-i)}2^{l-i}\cdot\left(\frac{N-3}{2}-i\right)^{(l-i)}2^{l-i}\right.\right.$$
$$\left.\left.\cdot\left(l+i+\frac{1}{2}\right)^{(i)}2^i\right\} : 2^{2l}\,l!\,l!\right]\cdot(2l+1)!\sqrt{\frac{4l+3}{(N^2-1^2)(N^2-2^2)\cdots(N^2-[2l+1]^2)}}$$

$$(11)\quad X_{2l} = \left[\Delta^l_{i=0}\binom{\frac{x}{2}-\frac{1}{2}+i}{2i}\binom{\frac{N}{2}+l}{l-i}\binom{\frac{N}{2}-i-1}{l-i}\frac{\binom{l+i-\frac{1}{2}}{i}2^{2i}}{\binom{l}{i}\binom{l}{i}}\right]$$
$$\cdot(2l)!\sqrt{\frac{4l+1}{(N^2-1^2)(N^2-2^2)\cdots(N^2-[2l]^2)}},$$

wobei die Wurzeln mit positivem Vorzeichen zu nehmen sind. Auch hier sind die in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke für alle Werte die x bei der Summation nach (1) bzw. (4) durchläuft, das heißt für alle ungeraden ganzzahligen Werte ganze Zahlen.

Es verdient noch hervorgehoben zu werden, daß die Formeln (7) und (10) einen weiteren besonderen Vorzug besitzen. Die in den geschweiften Klammern stehenden Ausdrücke müssen durch einen für alle ganzzahligen bzw. ganzzahligen und ungeraden Argumentwerte gleichen Divisor teilbar sein, und müssen bei der numerischen Auswertung auch tatsächlich geteilt werden. Damit hat man eine dauernde wertvolle Kontrolle im ganzen Verlauf der Rechnung. Eine Schlußkontrolle gestatten die weiter unten gegebenen Formeln für die Summen der Funktionswerte. Man erkennt übrigens noch leicht, daß in den Ausdrücken (7) und (10) die in den Divisoren $(2^{2l}\,l!\,l!)$ enthaltenen ungeraden Primfaktoren in die geschweiften Klammern hineindividiert werden können, ohne daß dadurch in diesen gebrochene Zahlen auftreten. Es bedarf wohl kaum des Hinweises, daß man sich, ehe man an die Auswertung der Funktionen geht, zunächst Hilfstabellen für die Ausdrücke

$$\binom{x+1}{3},\quad \binom{x+2}{5},\quad \binom{x+3}{7},\quad \binom{x+4}{9},\ldots$$

bzw.

$$(4x^2-1),\quad \frac{(4x^2-1)(4x^2-9)}{3},\quad \frac{(4x^2-1)(4x^2-9)(4x^2-25)}{3\cdot 5\cdot 3},$$
$$\frac{(4x^2-1)(4x^2-9)(4x^2-25)(4x^2-49)}{3\cdot 5\cdot 3\cdot 7},\ldots$$

usw. anlegen wird. Die numerische Auswertung der Funktionen X ist bis zum sechsten Grade und bis zum Reihenumfang $N = 80$ im Institut für Konjunkturforschung unter meiner Leitung bereits erfolgt. Die Tabellen sind in dem oben genannten Sonderheft 21 der Vierteljahrshefte zur Konjunkturforschung „Der Trend", veröffentlicht. Die in Angriff genommene Weiterführung der Tabellen bis zum achten Grad und bis zum Reihenumfang $N = 100$ mußte leider infolge von Finanzierungsschwierigkeiten abgebrochen werden.

Bezüglich der Berechnung dieser Tabellen sei es gestattet, noch folgendes anzumerken. Wie natürlich, ist es erst nach und nach gelungen, den Funktionen X die in den Formeln (6), (7), (10) und (11) niedergelegte praktischste Gestalt zu geben. Erst die nach Veröffentlichung des genannten Werkes begonnenen Auswertungen der Funktionen X_7 und X_8 für $N = 8$ bis $N = 80$ und der Funktionen X_2 und X_3 für $N = 81$ bis $N = 100$ sollten unter Zugrundelegung der neuen Formeln geschehen. Die bereits veröffentlichten Tabellen sind in mühsamer Arbeit unter Benutzung von Entwicklungen nach Potenzen berechnet worden, wobei die Zahlen oft so groß wurden, daß sie die Fassungskraft der Rechenmaschine überschritten und zu einer Rechnung in Teilen zwangen. Gegenüber der Darstellung nach Potenzen von x bedeutet die Benutzung der oben gegebenen Darstellung *einen ganz erheblichen Minderaufwand an Rechenarbeit.*

Zur Tabellierung der Funktionen X_3, X_4 bis X_8 für $N = 81$ bis $N = 100$ benutzen wir eine Rekursionsformel, die man leicht aus einer von Tschebycheff gegebenen Rekursionsformel (vgl. Tschebyscheff,' Oeuvres T. I, p. 473 . . 498 ableitet. Sie lautet für ungerades N

$$\psi_k = \frac{2(2k-1)x\psi_{k-1} - (N^2 - [k-1]^2)\psi_{k-2}}{k^2}$$

und für gerades N

$$\psi_k = \frac{(2k-1)x\psi_{k-1} - (N^2 - [k-1]^2)\psi_{k-2}}{k^2}.$$

Diese Rekursionsformeln sind sehr bequem für die Auswertung der Funktionen ψ_k, falls die Werte der Funktionen ψ_{k-1} und ψ_{k-2} für das gleiche N bereits vorliegen. Sie besitzen den gleichen Vorzug wie die Formeln (7) und (10), nämlich den, daß die letzte

Operation bei der Berechnung der Funktionswerte ψ eine Division ist, die aufgehen muß. Ergibt trotzdem einmal die Summe der Funktionswerte nicht das gemäß den nachstehend gegebenen Formeln zu erwartende Resultat, so kann man doch das mühsame und zeitraubende Aufsuchen des oder der Rechenfehler vermeiden, falls man die Absicht hat, auch noch die Funktion ψ_{k+1} zu berechnen. Da nämlich ψ_k in die Rekursionsformel für ψ_{k+1} eingeht, wird sich bei Berechnung der Werte von ψ_{k+1} nach dieser Formel der falsch berechnete bzw. falsch hingeschriebene Funktionswert von ψ_k in vielen Fällen von selbst dadurch kenntlich machen, daß für den entsprechenden Argumentwert die geforderte Division nicht aufgeht.

Für die Endkontrolle der berechneten Tabellen sind die folgenden Formeln von großem Wert.

I. Ungerades N.

$$\left(x = 0,\ 1,\ 2, \ldots, \frac{N-1}{2}\right)$$

$$\sum_{x=0}^{\frac{N-1}{2}} X_{2l+1} = (-1)^l\, 2^{2l+1} \binom{l-\frac{1}{2}}{l} \binom{\frac{N+1}{2}+l}{2l+2} \cdot (2l+1)! \sqrt{\frac{4l+3}{(N^2-1^2)\,(N^2-2^2)\cdots(N^2-[2l+1]^2)}}$$

$$\sum_{x=0}^{\frac{N-1}{2}} X_{2l} = (-1)^l\, 2^{2l-1} \binom{l-\frac{1}{2}}{l} \binom{\frac{N-1}{2}+l}{2l} \cdot (2l)! \sqrt{\frac{4l+1}{(N^2-1^2)\,(N^2-2^2)\cdots(N^2-[2l]^2)}}.$$

II. Gerades N.

$$(x = 1,\ 3,\ 5, \ldots,\ N-1)$$

$$\sum_{x=1}^{N-1} X_{2l+1} = (-1)^l \frac{1}{2(l+1)} \binom{2l}{l} N \binom{\frac{N}{2}+l}{2l+1} \cdot (2l+1)! \sqrt{\frac{4l+3}{(N^2-1^2)\,(N^2-2^2)\cdots(N^2-[2l+1]^2)}}$$

$$\sum_{x=1}^{N-1} X_{2l} = 0.$$

Nachschrift.

Läßt man N unbegrenzt wachsen und setzt bei ungeradem N $\frac{2x}{N} = \xi$, bei geradem N $\frac{x}{N} = \xi$, dann wird

$$N \to \infty$$

$$X_{2l+1} = \Delta^l_{i=0} \binom{l+i+\frac{1}{2}}{l} \xi^{2i+1} \cdot \sqrt{4l+3} = P_{2l+1} \cdot \sqrt{4l+3}$$

$$X_{2l} = \Delta^l_{i=0} \binom{l+i-\frac{1}{2}}{l} \xi^{2i} \cdot \sqrt{4l+1} = P_{2l} \cdot \sqrt{4l+1},$$

wobei

$$P_{2l+1} = \Delta^l_{i=0} \binom{l+i+\frac{1}{2}}{l} \xi^{2i+1} = \frac{1}{2^{2l+1}(2l+1)!} \cdot \frac{d^{2l+1}\,(\xi^2-1)^{2l+1}}{d\xi^{2l+1}}$$

und

$$P_{2l} = \Delta^l_{i=0} \binom{l+i-\frac{1}{2}}{l} \xi^{2i} = \frac{1}{2^{2l}\,(2l)!} \cdot \frac{d^{2l}\,(\xi^2-1)^{2l}}{d\xi^{2l}}$$

die Legendreschen Kugelfunktionen vom Grade $2l+1$ bzw. $2l$ sind.

Abgeschlossen 31. 10. 31.

Eingegangen 4. November 1931.

Zur Theorie der auflösbaren Gleichungen von Primzahlgrad. I.

Von *Udo Wegner* in Darmstadt.

Meinem verehrten Lehrer und Freunde **G. Herglotz** zum Geburtstage gewidmet.

In der vorliegenden Abhandlung, sowie in drei weiteren, die unter dem gleichen Titel erscheinen werden, soll es sich darum handeln, zu zeigen, wie man aus der Kenntnis der Primzahlpotenzen, welche in der Diskriminante bzw. in den Koeffizienten einer vorgelegten algebraischen Gleichung von Primzahlgrad mit numerischen Koeffizienten aufgehen, Kriterien für die Auflösbarkeit oder Nichtauflösbarkeit gewinnen kann. (Nur um begriffliche Komplikationen zu vermeiden, setzen wir voraus, daß die Koeffizienten rationale Zahlen sind). Weiterhin wird sich die Möglichkeit herausstellen, für eine auflösbare Gleichung in gewissen Fällen eine erzeugende Zahl des zugehörigen algebraischen Körpers allein aus der Diskriminante heraus explizit anzugeben.

Erwähnt sei, daß unsere Untersuchungen darauf hinauslaufen, Sätze zu erhalten, die analog dem Eisensteinschen Irreduzibilitätskriterium sind, nur daß hier zwischen auflösbar und nicht-auflösbar entschieden wird, was naturgemäß feinere Strukturuntersuchungen der Primidealzerlegung erfordert.

Die Grundlage unserer Untersuchungen bildet die Primidealzerlegung in auflösbaren Körpern. Diese Primidealzerlegung wurde bereits von Herrn F. K. Schmidt in einer Note behandelt. Wir werden sie aber auf einem etwas anderen Wege unmittelbar aus der Dedekindschen Zerlegungsformel herleiten und sie auch auf die Zerlegung in den in Frage kommenden Unter- und Oberkörpern erweitern.

Wir benutzen idealtheoretische und algebraische Methoden. In den Fällen, in denen die Potenz der in der Diskriminante aufgehenden Primzahlen auf idealtheoretischem Wege nicht in einfacher Weise festzustellen ist, werden analytische Methoden herangezogen. Ein Ausbau dieser Methoden wird in Teil III und IV durchgeführt, und es werden dort zugleich einige Fragen über die explizite Darstellung der Artinschen Reihen beantwortet.

In der ersten Arbeit behandeln wir die Primidealzerlegung in auflösbaren Körpern und die Diskriminantenrelationen zwischen den Unterkörpern des zum auflösbaren Körper gehörigen Galoisschen Körpers. Es gelingt uns in gewissen Fällen, eine erzeugende Zahl des zugehörigen Galoisschen Körpers allein aus der Kenntnis der Diskriminante heraus anzugeben. Dieser Fall tritt ein, wenn es sich um eine Diskriminante handelt, die die Struktur der Diskriminante von solchen Körpern hat, die durch eine binomische Gleichung von Primzahlgrad erzeugt werden.

In der zweiten Arbeit werden wir die Ergebnisse von I auf die Gleichungen 5-ten Grades anwenden und auf einem ganz neuen, weit elementareren Wege verschiedene Sätze über numerische auflösbare Gleichungen 5-ten Grades ableiten.

In der dritten Arbeit endlich geben wir in speziellen Fällen Bedingungen für die Primteiler der Diskriminante an, die für die Auflösbarkeit hinreichend sind [1]).

---

[1]) Erwähnt seien hier noch die anderen Charakterisierungen der auflösbaren Gleichungen, bei denen die Koeffizienten, insbesondere das absolute Glied, noch von einem Parameter abhängen, die in meiner Arbeit über „Tschebyscheffsche Polynome“ (erscheint in den Math. Ann.) enthalten sind. Auch darf ich an dieser Stelle die noch nicht publizierten Untersuchungen von Herrn F. K. Schmidt nennen, die auf die Charakterisierungen von Abelschen Körpern über $P(1, t)$ hinauskommen. Im Anschluß an meine Untersuchungen über Tschebyscheffsche Polynome

In der vierten Arbeit werden wir die allgemeinen Strukturverhältnisse in auflösbaren Körpern von Primzahlgrad sowie deren Galoisschen Körpern untersuchen, weiter auch Resultate über auflösbare Gleichungen von Primzahlpotenzgrad herleiten.

§ 1. Sätze über die metazyklische Gruppe von Primzahlgrad.

Die metazyklische Permutationsgruppe vom Primzahlgrad p ist von der Ordnung $p(p-1)$ und wird erzeugt durch zwei Substitutionen S und T, wobei $S^p = T^{p-1} = E$ und $S\,T = T\,S^g$ ist. g bedeutet eine primitive Wurzel mod p. Daraus folgt, daß $S^\alpha\,T^\beta = T^\beta\,S^{\alpha\cdot g^\beta}$ ist, und somit wird die Ordnung des Elementes $T^\beta\,S^\alpha$ gleich $\frac{p-1}{(p-1,\,\beta)}$, falls nicht $\beta \equiv 0 \pmod{p-1}$ ist. Die Untergruppen der metazyklischen Gruppe sind entweder zyklisch und darstellbar durch $\{T^\beta\,S^\alpha\}$ und durch $\{S\}$, oder sie sind nicht zyklisch und darstellbar in der Form $\{S, T^\varkappa\}$, wobei $\varkappa$ ein Teiler von $p-1$ ist. $\{S\}$ und $\{S, T^\varkappa\}$ sind transitive invariante Untergruppen der metazyklischen Gruppe. $\{S, T^\varkappa\}$ ist von der Ordnung $\frac{p(p-1)}{\varkappa}$. Die Untergruppen $\{T^\beta\,S^\alpha\}$ sind in der metazyklischen Gruppe nicht invariant enthalten. Als Galoissche Gruppen einer irreduziblen auflösbaren algebraischen Gleichung von Primzahlgrad kommen nur die transitiven Gruppen $\{S, T^\varkappa\}$ und $\{S\}$ in Frage. Es sei $\mathfrak{G} = \{S, T^\varkappa\}$. $\mathfrak{G}$ besitzt eine invariante Untergruppe von der Ordnung p. Sei nun

$$f(x) = a_0\,x^p + a_1\,x^{p-1} + \cdots + a_n = 0$$

eine algebraische Gleichung vom Primzahlgrad p mit Koeffizienten aus $\mathsf{P}(1)$, dem Körper der rationalen Zahlen, und irreduzibel in diesem Körper. ϑ genüge der Gleichung und erzeuge den Körper $\mathsf{P}(\vartheta)$. Mit $N(\vartheta) =$ „Norm von $\mathsf{P}(\vartheta)$“ möge der zugehörige Galoissche Körper bezeichnet werden. $N(\vartheta)$ ist dann vom Grade $\frac{p(p-1)}{\varkappa}$. Nach dem oben Gesagten besitzt $N(\vartheta)$ einen Galoisschen Unterkörper $\mathsf{P}(\eta) = N(\eta)$ vom Grade $\frac{p-1}{\varkappa}$. Weiter ist das kleinste gemeinsame Vielfache von $\mathsf{P}(\vartheta)$ und $N(\eta)$ der Körper $N(\vartheta)$. Man schreibt auch

$$\mathsf{P}(\vartheta) \cdot N(\eta) = N(\vartheta).$$

$N(\vartheta)\,|\,N(\eta)$ ist relativ zyklisch vom Grade p. Diese einfache Tatsache werden wir nun benützen, um die Primidealzerlegung in $\mathsf{P}(\vartheta)$ abzuleiten. Wir benützen demnach andere Hilfsmittel als Herr F. K. Schmidt in seiner interessanten Note [1]).

§ 2. Die Primidealzerlegung $\mathsf{P}(\vartheta)$.

Es sei in $\mathsf{P}(\eta) = N(\eta)$ das Hauptideal (q), wobei q eine in der Diskriminante von $\mathsf{P}(\vartheta)$ aufgehende Primzahl sein möge, zerlegbar in $(q) = (\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_a)^b$, wobei $\mathfrak{p}_\nu (\nu = 1, 2, \ldots, a)$ Primideale vom Grade f sind, so daß $f\,a\,b = \frac{p-1}{\varkappa}$ wird. In $N(\vartheta)$ kann dann (q) nur auf drei verschiedene Arten zerfallen:

1. $(q) = (\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_a)^b$, wobei $\mathfrak{P}_\nu$ Primideale in $N(\vartheta)$ vom Grade $p\,f$ sind,
2. $(q) = (\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_a)^{bp}$, wobei $\mathfrak{P}_\nu$ Primideale vom Grade f sind,

oder 3. $(q) = (\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_{ap})^b$, wobei $\mathfrak{P}_\nu$ Primideale vom Grade f sind.

---

werde ich in einer Note zeigen, wie alle Abelschen Gleichungen über $\mathsf{P}(1, t)$ durch bestimmte Operatoren mittelst der Zusammensetzung $f(g(x, t))$ erlangt werden können.

[1]) F. K. Schmidt, Zur Theorie der algebraisch auflösbaren Polynome und Zahlkörper von Primzahlgrad. Sitzb. d. Heidelberger Ak. d. Wiss. 1929, Math.-nat. Klasse, S. 3—10.

Da $\mathsf{P}(\vartheta) < N(\vartheta)$, können wir nach der bekannten Dedekindschen Regel die Primidealzerlegung in $\mathsf{P}(\vartheta)$ ableiten. Zu diesem Zweck haben wir nur $\mathfrak{G}$ (modd $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{H}$) zu zerlegen:

$$\mathfrak{G} = \sum_{\nu=1}^{e'} \mathfrak{Z}\, \varphi_\nu\, \mathfrak{H},$$

wobei $\mathfrak{Z}$ die Zerlegungsgruppe eines Primideals $\mathfrak{P}$ bezeichnet. φ_ν sind solche Substitutionen aus $\mathfrak{G}$, daß $\mathfrak{G}$ wirklich in elementfremde Komplexe zerfällt, und $\mathfrak{H}$ bezeichnet die Untergruppe, zu der $\mathsf{P}(\vartheta)$ gehört. $\mathfrak{H}$ ist eine zyklische Gruppe von der Ordnung $\frac{p-1}{\varkappa}$.

$\mathfrak{T}$ sei die Trägheitsgruppe des Primideals $\mathfrak{P}$, r_t ihre Ordnung. Bilden wir dann die Gruppen $\varphi_\nu^{-1}\,\mathfrak{T}\,\varphi_\nu = \mathfrak{T}_\nu$, und sei der größte gemeinsame Teiler von $\mathfrak{T}_\nu$ und $\mathfrak{H}$ von der Ordnung t_ν, so definieren wir e_ν durch die Relationen

$$b = r_t = e_\nu\, t_\nu.$$

Es ist dann

$$(q) = \mathfrak{q}_1^{e_1}\, \mathfrak{q}_2^{e_2} \cdots \mathfrak{q}_{e'}^{e_{e'}} \text{ in } \mathsf{P}(\vartheta).$$

Im Fall 1. und 3. ist $\mathfrak{T}$ von der Ordnung b, wo b ein Teiler von $\frac{p-1}{\varkappa}$ ist; somit ist $\mathfrak{T}$ zyklisch von der Ordnung $\frac{p-1}{\varkappa f a}$ und damit auch $\mathfrak{T}_\nu$. Da sämtliche $\mathfrak{T}_\nu = T^{\beta_\nu} S^{\alpha_\nu}$ verschieden sind und $\mathfrak{H}$ ebenfalls zyklisch von der Ordnung $\frac{p-1}{\varkappa}$ ist, so erkennt man, daß entweder $(\mathfrak{T}_\nu, \mathfrak{H}) = E$ ist, oder für ein einziges ν $(\mathfrak{T}_\nu, \mathfrak{H}) = \mathfrak{T}_\nu$ ist. Es ist also entweder $e_1 = e_2 = e_3 = \cdots = e_{e'} = r_t$, oder es ist $e_1 = 1$ und $e_2 = e_3 = e_4 = \cdots = e_{e'} = r_t$. Ebenso ergibt sich aus der Dedekindschen Regel und der Betrachtung von $\varphi_\nu^{-1}\,\mathfrak{Z}\,\varphi_\nu = \mathfrak{Z}_\nu$, daß entweder die Grade von allen $\mathfrak{q}_\nu$ einander gleich sind oder daß ein $\mathfrak{q}_\nu$ den Grad 1 hat und die übrigen $\mathfrak{q}_\nu$ gleichen Grad f' haben, wobei dann $f' \,\Big|\, \frac{p-1}{\varkappa}$ ist.

$(q) = (\mathfrak{q}_1\, \mathfrak{q}_2 \cdots \mathfrak{q}_{e'})^{r_t}$ in $\mathsf{P}(\vartheta)$ ist nicht möglich, da sonst $r_t g = p$ sein müßte, wie aus der Normengleichheit folgt, weil $\mathsf{P}(\vartheta)$ vom Grade p war. Da aber $r_t = b$ ein Teiler von $\frac{p-1}{\varkappa}$ war, so müßte $r_t = 1$ sein. Dies geht aber nicht, da nach Voraussetzung q ein Teiler von $\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)}$, der Diskriminante von $\mathsf{P}(\vartheta)$, sein sollte und deshalb mindestens ein Primideal $\mathfrak{q}_\nu$ zu einer höheren als der ersten Potenz in (q) aufgehen müßte.

Also ist im Falle 1. und 3.

$$(q) = \bar{\mathfrak{q}}_1 (\mathfrak{q}_2 \cdots \mathfrak{q}_e)^{r_t} \text{ in } \mathsf{P}(\vartheta).$$

Wir behaupten, daß alle $\mathfrak{q}_\nu$ von gleichem Grade f' sind, dagegen $\bar{\mathfrak{q}}_1$ vom Grade 1. Wären $\bar{\mathfrak{q}}_1$ und alle $\mathfrak{q}_\nu$ bis auf eines, z. B. $\mathfrak{q}_2$, vom Grade f' und das ausgenommene $\mathfrak{q}_2$ vom Grade 1, so folgt aus der Normbeziehung:

$$f' + r_t\, f'(e-1) + r_t = p$$

und daraus

$$f' - 1 + r_t\, m = p - 1,$$

d. h. $r_t \mid f' - 1$, da $r_t \mid p - 1$ war. Ebenso ist

$$r_t - 1 + f'\, m = p - 1,$$

d. h. $f' \mid r_t - 1$, da $f' \mid p - 1$ ist. Diese beiden Teilbarkeitsbeziehungen können aber nur bestehen, falls $f' = 1$ ist. Dann gilt aber unsere obige Behauptung. Somit sind alle $\mathfrak{q}_\nu$ vom Grade f' und $\bar{\mathfrak{q}}_1$ vom Grade 1.

Es ist noch zu beachten, daß $r_t = b$ ist, wobei b den Exponenten des Primideals in $N(\eta)$ bezeichnet: $(q) = (\mathfrak{p}_1\, \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_a)^b$. Wir erkennen aber noch weiter, daß in diesem Falle keines der Primideale $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_a$ von (q) in $N(\eta)$ in der Relativdiskriminante

von $N(\vartheta)\,|\,\mathsf{P}(\vartheta)$ aufgeht, da beim Übergang von $N(\eta)$ zu $N(\vartheta)$ $\mathfrak{p}_\nu$ entweder $= \mathfrak{P}_\nu$ oder $= \mathfrak{P}_{\nu_1}\mathfrak{P}_{\nu_2}\cdots\mathfrak{P}_{\nu_p}$ wird, wie es Fall 1. und 3. zeigen.

Wir können noch aus der Zerlegungsformel die Tatsache ablesen, daß $e = a\varkappa$ ist und die Grade von $\mathfrak{p}_\nu$ in $N(\eta)$ mit denen von $\mathfrak{q}_\nu$ in $\mathsf{P}(\vartheta)$ übereinstimmen. Man hat hierbei nur zu beachten, daß $N(\eta)$ zu der zyklischen Gruppe $\{S\}$ von der Ordnung p gehört und die Zerlegungsgruppe $\mathfrak{Z}$ stets zu $\{S\}$ teilerfremd ist, weil $\mathfrak{Z}$ von einer Ordnung $< p$ ist.

Der Fall 2. erledigt sich einfach, denn in diesem Falle kann (q) in $\mathsf{P}(\vartheta)$ nur in der Form $(q) = \mathfrak{q}^p$ zerfallen, wobei $\mathfrak{q}$ ein Primideal ersten Grades ist. Denn beim Übergang von $\mathsf{P}(\vartheta)$ zu $N(\vartheta)$ kann der Exponent des Primideals sich nicht mit p multiplizieren, da $N(\vartheta)\,|\,\mathsf{P}(\vartheta)$ relativ zyklisch vom Grade $\dfrac{p-1}{\varkappa}$ ist.

Die Primidealzerlegung derjenigen Primzahlen q in $\mathsf{P}(\vartheta)$, die nicht in der Diskriminante von $\mathsf{P}(\vartheta)$ aufgehen, ergibt sich sofort aus dem bekannten Dedekindschen Satze, der die Beziehung zwischen den Zyklen in den Substitutionen der Galoisschen Gruppe und der Primidealzerlegung aufdeckt.

Nach dem Dedekindschen Satze ist dann:

1. $(q) = \mathfrak{q}_1\,\mathfrak{q}_f'\,\mathfrak{q}_f''\cdots\mathfrak{q}_f^{(\nu)}$,

wobei $\mathfrak{q}_1$ = Primideal vom 1-ten Grade

und $\mathfrak{q}_f^{(\varrho)}$ = Primideal vom f-ten Grade ist.

2. $(q) = \mathfrak{q}_1\,\mathfrak{q}_1'\,\mathfrak{q}_1''\cdots\mathfrak{q}_1^{(p-1)}$,

wobei $\mathfrak{q}_1^{(\nu)}$ = Primideal vom 1-ten Grade,

oder 3. $(q) = \mathfrak{q}_p$ = Primideal vom p-ten Grade.

Denn die metazyklische Gruppe von Primzahlgrad enthält nur Substitutionen, die einen Zyklus der Ordnung 1 und sonst nur Zyklen gleicher Ordnung enthalten, oder aber die Substitution ist ein Zyklus p-ter Ordnung oder das Einheitselement. Damit ist die Primidealzerlegung vollständig bekannt und weitgehend die Beziehungen zwischen den Primidealzerlegungen in $\mathsf{P}(\vartheta)$, $N(\eta)$ und $N(\vartheta)$ aufgedeckt. Man könnte jetzt die Beziehungen zwischen den Diskriminanten von $N(\vartheta)$, $N(\eta)$ und $\mathsf{P}(\vartheta)$ ableiten. Jedoch machen die singulären Primzahlen nicht unerhebliche Schwierigkeiten, so daß wir hier doch analytische Hilfsmittel heranziehen wollen, aus denen unmittelbar die Beziehungen folgen.

Zusammenfassend können wir sagen:

Es sei $\mathsf{P}(\vartheta)$ *ein auflösbarer algebraischer Zahlkörper über* $\mathsf{P}(1)$ *vom Primzahlgrad* p. *Es gibt dann einen Galoisschen Körper über* $\mathsf{P}(1)$: $N(\eta)$ *vom Grade* $\dfrac{p-1}{\varkappa}$, *so daß*

$$N(\eta)\,\mathsf{P}(\vartheta) = N(\vartheta),$$

dem Galoisschen Körper über $\mathsf{P}(\vartheta)$, *ist.* $N(\vartheta)$ *ist vom Grade* $\dfrac{p(p-1)}{\varkappa}$. *Hat die Primzahl* q, *die in der Diskriminante von* $\mathsf{P}(\vartheta)$ *aufgeht, die Zerlegung in* $N(\eta)$:

$$(q) = (\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2\cdots\mathfrak{p}_a)^b$$

und geht $\mathfrak{p}_\nu(\nu = 1, \ldots, a)$ *nicht in der Relativdiskriminante von* $N(\vartheta)\,|\,N(\eta)$ *auf* (man beachte, daß entweder alle $\mathfrak{p}_\nu$ in der Relativdiskriminante aufgehen oder keines), *so hat* (q) *in* $\mathsf{P}(\vartheta)$ *die Zerlegung*

$$(q) = \bar{\mathfrak{q}}_1(\mathfrak{q}_1\,\mathfrak{q}_2\cdots\mathfrak{q}_e)^b,$$

wobei $\bar{\mathfrak{q}}_1$ *vom Grade* 1 *und* $\mathfrak{q}_\nu(\nu = 1, \ldots, e)$ *vom gleichen Grade* $\dfrac{p-1}{b\,e}$ *sind. Weiter ist* $e = a\varkappa$, *und die Grade von* $\mathfrak{p}_\nu$ *in* $N(\eta)$ *stimmen mit denen von* $\mathfrak{q}_\nu$ *in* $\mathsf{P}(\vartheta)$ *überein. Geht aber* $\mathfrak{p}_\nu$ *in der Relativdiskriminante von* $N(\vartheta)\,|\,\mathsf{P}(\vartheta)$ *auf* (q kann auch $= p$ sein), *so besitzt* (q) *in* $\mathsf{P}(\vartheta)$ *die Zerlegung*

$$(q) = \mathfrak{q}^p,$$

wobei $\mathfrak{q}$ *ein Primideal 1-ten Grades ist. Für die Primzahlen* q*, die nicht in der Diskriminante von* $\mathsf{P}(\vartheta)$ *aufgehen, hat man nur die drei verschiedenen Formen der Zerlegung, die auf S. 179 abgeleitet sind.*

§ 3. Diskriminantenbestimmung von Körpern, die durch binomische Gleichungen erzeugt werden.

Wir wollen uns zunächst mit den Diskriminanten von solchen Körpern beschäftigen, die durch binomische Gleichungen der Form $x^p - a = 0$ von ungeradem Primzahlgrad erzeugt werden, wobei $a \neq 0$ eine ganze rationale Zahl ist, die keine Primzahl in höherer als der $(p-1)$-ten Potenz enthält. Dies ist keine Einschränkung der Allgemeinheit. Ebenso kann man auch $a > 0$ voraussetzen. Bekanntlich ist dann $x^p - a = 0$, falls $a > 1$ ist, im Bereich der rationalen Zahlen irreduzibel. Wie drückt sich die Körperdiskriminante von $\mathsf{P}(\vartheta)$, wobei ϑ der Gleichung $x^p - a = 0$ genügt, durch die verschiedenen in a aufgehenden Primzahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ aus, wenn a die Gestalt hat:

$$a = p^\alpha p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n} \qquad (0 < \alpha_\nu \leqq p-1), \qquad p_\nu \neq p \quad \text{für} \quad \nu = 1, 2, \ldots, n\,?$$

Wir werden zeigen, daß die Körperdiskriminante $\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)} = p^m (p_1 p_2 \cdots p_n)^{p-1}$ ist, wobei $m > 0$ weiter unten näher bestimmt wird.

Beweis: 1. Es sei $(a, p) = 1$; dann wird

$$f(x) = x^p - a \equiv x^p \equiv \varphi(x)^p \pmod{p_\nu}\ ^1),$$

also $f(x) = \varphi(x)^p + Q_p(x)\, p_\nu^{\alpha_\nu}$, wobei $Q_p(x) = \dfrac{a}{p_\nu^{\alpha_\nu}}$ gesetzt ist. Das zugehörige Newtonsche Polygon besteht dann aus einer Seite $S^{(\nu)}$ mit der Projektion $l = p$ auf die x-Achse und $h = a_\nu$ auf die y-Achse. Dann wird die Summe derjenigen Glieder, die durch Punkte auf der Seite $S^{(\nu)}$ abgebildet werden, $\psi(x) = \varphi(x)^p + Q_p(x)\, p_\nu^{\alpha_\nu}$, so daß $F(x, y) = y^e + Q_p(x)$ wird, wobei $e = (1, h) = 1$ ist, d. h. $F(x, y) = y + \dfrac{a}{p_\nu^{\alpha_\nu}}$. Zerlegt man $F(x, y)$ modd p_ν, $\varphi(x)$, so entsteht nur die triviale Zerlegung $y - \dfrac{a}{p_\nu^{\alpha_\nu}}$ in Primfunktionen, und somit ist die Gleichung $f(x)$ regulär in bezug auf die Primzahl p_ν. Dies gilt übrigens für jedes ν aus der Reihe $1, 2, \ldots, n$. Dann wird der Index k der Gleichung $f(x) = 0$ genau durch $p_\nu^{\Sigma \bar{m} L}$ teilbar, wobei die Summe über alle verschiedenen Primfunktionen $\varphi(x)$ von $f(x)$ mod p erstreckt werden soll. L ist die Anzahl der Gitterpunkte, die zwischen dem Polygon, der x-Achse und der Endordinate des Polygons liegen (Punkte auf der x-Achse oder Endordinate nicht mitgerechnet). $\bar{m}$ ist der Grad der Primfunktion $\varphi(x)$, also $= 1$ bei uns. L ist bei uns offenbar $= \sum_{\varrho=0}^{p-1} \left[\dfrac{\alpha_\nu\, \varrho}{p}\right]$. Diese Summe ist sehr einfach zu berechnen; denn $\alpha_\nu\, \varrho$ durchläuft ein vollständiges Restsystem $r_\varrho \pmod p$ mit $\varrho = 0, 1, \ldots, p-1$, da $(\alpha_\nu, p) = 1$ vorausgesetzt war; also wird

$$\frac{\alpha_\nu \varrho}{p} = \left[\frac{\alpha_\nu \varrho}{p}\right] + \frac{r_\varrho}{p}, \qquad \frac{\alpha_\nu}{p} \sum_{\varrho=0}^{p-1} \varrho = \sum_{\varrho=0}^{p-1} \left[\frac{\alpha_\nu \varrho}{p}\right] + \frac{1}{p} \sum_{r=0}^{p-1} r_\varrho,$$

$$\frac{\alpha_\nu p(p-1)}{2p} = L + \frac{p(p-1)}{2p}, \qquad L = \frac{(\alpha_\nu - 1)(p-1)}{2}.$$

Es sei Δ die Gleichungsdiskriminante, dann ist $\Delta = k^2 \Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)}$, und da $\Delta = p^p (p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n})^{p-1}$ wird, so ist $\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)}$ durch p^{p-1} genau teilbar, weil p_ν in k^2 zur $(\alpha_\nu - 1)(p-1)$-ten Potenz aufgeht. Somit hat $\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)}$ die Gestalt $p^m (p_1 p_2 \cdots p_n)^{p-1}$. Es bleibt noch übrig, m zu

---

[1]) Siehe Öystein Ore, Zur Theorie der algebraischen Körper, Acta math. **44** (1923), S. 1—36.

bestimmen. Eine elementare Betrachtung läßt unmittelbar den Weg zur Bestimmung erkennen. Nach dem Dedekindschen Indexsatz ist p dann und nur dann Indexteiler, wenn in der Zerlegung von $f(x)$ mod p:

$$f(x) = \varphi_1^{e_1}(x)\,\varphi_2^{e_2}(x) \cdots \varphi_n^{e_n}(x) + pM(x),$$

das Polynom $M(x)$ mod p durch mindestens eine der Primfunktionen $\varphi_{\alpha_1}(x), \ldots, \varphi_{\alpha_k}(x)$ teilbar ist, für die $e_{\alpha_v} > 1$ $(v = 1, \ldots, k)$ ist. Bei uns hieße das, da $(a, p) = 1$ vorausgesetzt war,

$$x^p - a \equiv (x - a)^p \pmod{p},$$

$$x^p - a = (x - a)^p + \binom{p}{1} a(x - a)^{p-1} + \cdots + a^p - a$$

$$= (x - a)^p + p\left[a(x - a)^{p-1} + \cdots + a^{p-1}(x - a) + \frac{a^p - a}{p}\right],$$

so daß es auf die Entscheidung zwischen $a^p - a \equiv 0 \pmod{p^2}$ und $a^p - a \not\equiv 0 \pmod{p^2}$ ankommt.

2. Wir behandeln schließlich noch den Fall, daß $a \equiv 0 \pmod{p}$ ist. Es sei dann a genau durch p^α teilbar, wobei wieder $0 < \alpha \leqq p - 1$ vorausgesetzt werden darf. In Δ, der Gleichungsdiskriminante, geht dann p zur Potenz $p + \alpha(p - 1)$ auf. Wir berechnen nach der Oreschen Regel [1]) den Exponenten, mit welchem p in der Körperdiskriminante aufgeht. Es ist offenbar

$$f(x) \equiv x^p \equiv \varphi(x)^p \pmod{p},$$

$$f'(x) = px^{p-1} = \sum_{s=0}^{e-1} A_s(x)\, p^{\alpha_s}\, \varphi^s(x)$$

nach Ore. D. h.

$$s = e - 1 = p - 1, \qquad \alpha_s = 1, \qquad A_s(x) = 1.$$

Dann wird die Oresche Zahl R:

$$R = 1\,p + p - 1$$

und die Supplementzahl

$$\varrho_i = R - e + 1 = p.$$

Der Exponent, mit dem p in der Körperdiskriminante aufgeht, ist

$$f_i(e_i - 1 + \varrho_i) = 1\,(p - 1 + p) = 2\,p - 1.$$

Denn p wird in $\mathsf{P}(\vartheta)$ eine p-te Potenz eines Primideals, wie man aus dem Newtonschen Polygon erkennt [2]).

Aus den Sätzen des § 3 können wir unmittelbar die Zahl m bestimmen. Es war $(a, p) = 1$ und $a^p \equiv a \pmod{p^2}$. p ging im Index k der Gleichung $x^p - a = 0$ auf.

Wir behaupten, daß $m = p - 2$ ist.

Es ist zunächst $m \leqq p - 2$, denn die Gleichungsdiskriminante ist durch p^p genau teilbar und der Index mindestens durch p^1, so daß die Körperdiskriminante höchstens durch p^{p-2} teilbar ist. — In $\mathsf{P}(\vartheta)$ kann somit (p) nicht die Zerlegung $(p) = \mathfrak{q}^p$ haben, wobei $\mathfrak{q}$ ein Primideal ersten Grades ist. Da im Falle einer binomischen Gleichung $N(\eta) = \mathsf{P}(\varepsilon)$ ist, wobei ε eine p-te Einheitswurzel bedeutet, so ist in $\mathsf{P}(\varepsilon)$

$$(p) = \mathfrak{p}_1^{p-1} \qquad (\mathfrak{p}_1 = \text{Primideal ersten Grades}),$$

und nach S. 179 hat (p) in $\mathsf{P}(\vartheta)$ die Zerlegung

$$(p) = \bar{\mathfrak{q}}_1\, \mathfrak{q}_1^{p-1}.$$

p ist keine singuläre Primzahl, und demnach ist p zur Potenz $p - 2 = 0 \cdot 1 + (p - 2) \cdot 1$ in der Körperdiskriminante von $x^p - a = 0$ enthalten; d. h. aber

[1]) Siehe Öystein Ore, Über den Zusammenhang zwischen den definierenden Gleichungen, Math. Ann. **96** (1926), S. 346. [2]) Siehe Öystein Ore, Zur Theorie der algebraischen Körper, Acta math. **44** (1923), S. 79.

$$m = p - 2,$$

w. z. b. w.

Zusammenfassend können wir sagen:

Die Körperdiskriminante des durch die irreduzible Gleichung $x^p - a = 0$ *erzeugten algebraischen Körpers ist im Falle* $(a, p) = 1$

$$\Delta_{P(\vartheta)} = p^m (p_1 p_2 \cdots p_n)^{p-1},$$

falls $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}$ *ist* $(0 < \alpha_\nu \leqq p - 1,\ a > 1)$. *Es ist* $m = p$, *falls* $a^p \not\equiv a \pmod{p^2}$ *ist und* $m = p - 2$, *falls* $a^p \equiv a \pmod{p^2}$ *wird. Im Falle* $(a, p) = p$ *ist*

$$\Delta_{P(\vartheta)} = p^p (p\, p_1 p_2 \cdots p_n)^{p-1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots., n), \qquad p_\nu \neq p.$$

§ 4. Diskriminantenrelation.

Zwischen den Zetafunktionen der drei Körper besteht ein einfacher Zusammenhang. Es ist nämlich

$$\text{(I)} \qquad \zeta_{P(\vartheta)}^{\frac{p-1}{\varkappa}} \zeta_{N(\eta)} = \zeta_{N(\vartheta)} \zeta^{\frac{p-1}{\varkappa}}.$$

Dies ergibt sich einerseits aus der Zerlegung der nicht kritischen Primzahlen in den drei Körpern bzw. deren Beitrag zur Zetafunktion und andererseits aus der Heckeschen Schlußweise, die die kritischen Primzahlen ausschließt [1]). Aus der Relation für die Zetafunktionen können wir sofort unter Benutzung der Funktionalgleichung der Zetafunktion die Diskriminantenrelation

$$\Delta_{N(\vartheta)} = \Delta_{P(\vartheta)}^{\frac{p-1}{\varkappa}} \Delta_{N(\eta)}$$

ableiten. Nach der Funktionalgleichung wird:

$$\zeta_{P(\vartheta)}(s) = \zeta_{P(\vartheta)}(1-s)\left(2^{-r_2}\pi^{-\frac{p}{2}}\sqrt{|\Delta_{P(\vartheta)}|}\right)^{1-2s} \frac{\Gamma^{r_2}(1-s)\,\Gamma^{r_1}\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma^{r_2}(s)\,\Gamma^{r_1}\left(\frac{s}{2}\right)}$$

$$\zeta_{N(\eta)}(s) = \zeta_{N(\eta)}(1-s)\left(2^{-r_2'}\pi^{-\frac{p-1}{2\varkappa}}\sqrt{|\Delta_{N(\eta)}|}\right)^{1-2s} \frac{\Gamma^{r_2'}(1-s)\,\Gamma^{r_1'}\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma^{r_2'}(s)\,\Gamma^{r_1'}\left(\frac{s}{2}\right)}$$

$$\zeta_{N(\vartheta)}(s) = \zeta_{N(\vartheta)}(1-s)\left(2^{-r_2''}\pi^{-\frac{p(p-1)}{2\varkappa}}\sqrt{|\Delta_{N(\vartheta)}|}\right)^{1-2s} \frac{\Gamma^{r_2''}(1-s)\,\Gamma^{r_1''}\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma^{r_2''}(s)\,\Gamma^{r_1''}\left(\frac{s}{2}\right)}$$

$$\zeta(s) = \zeta(1-s)\,\frac{\pi^{-\frac{1}{2}+s}\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}.$$

In die Relation (I) eingesetzt, ergibt sich:

$$1 = \frac{\left(2^{-\left[r_2\frac{p-1}{\varkappa}+r_2'-r_2''\right]}\pi^{-\frac{1}{2}\left[p\left(\frac{p-1}{\varkappa}\right)+\frac{p-1}{\varkappa}-\frac{p(p-1)}{\varkappa}-\frac{p-1}{\varkappa}\right]}\sqrt{|\Delta_{P(\vartheta)}^{\frac{p-1}{\varkappa}}\Delta_{N(\eta)}\Delta_{N(\vartheta)}^{-1}|}\right)^{1-2s}}{\Gamma(1-s)^{-\left[r_2\frac{p-1}{\varkappa}+r_2'-r_2''\right]}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)^{-\left[r_1\frac{p-1}{\varkappa}+r_1'-r_1''-\frac{p-1}{\varkappa}\right]}\Gamma(s)^{\left[r_2\frac{p-1}{\varkappa}+r_2'-r_2''\right]}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)^{-\left[r_1\frac{p-1}{\varkappa}+r_1'-r_1''+\frac{p-1}{\varkappa}\right]}},$$

d. h.

---

[1]) Man vgl. die Arbeit von E. Artin, Über die Zetafunktionen gewisser algebraischer Zahlkörper, Math. Annalen 89 (1923), S. 147—156, insbesondere S. 151.

$$r_2\frac{p-1}{\varkappa}+r_2'-r_2''=0,\qquad r_1\frac{p-1}{\varkappa}+r_1'-r_1''=+\frac{p-1}{\varkappa},$$

$$\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)}^{\frac{p-1}{\varkappa}}\Delta_{\mathsf{P}(\eta)}=\pm\Delta_{N(\vartheta)}.$$

Wir wissen aber nach Kronecker, daß nur

$$r_1=p,\qquad r_2=0\quad\text{oder}\quad r_1=1,\qquad r_2=p-1$$

sein kann, d. h. aber

$$r_2''=r_2',\qquad r_1''=r_1'+\frac{(p-1)^2}{\varkappa}$$

oder

$$r_1''=r_1',\qquad r_2''=r_2'+\frac{(p-1)^2}{\varkappa}.$$

Da das Vorzeichen einer Diskriminante $=(-1)^{r_2}$ ist, ergibt sich aus der letzten Relation:

(II) $$\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)}^{\frac{p-1}{\varkappa}}\Delta_{N(\eta)}=\Delta_{N(\vartheta)}.$$

Nun ist bekanntlich

$$\Delta_{N(\vartheta)}=\Delta_{N(\eta)}^{p}\,\mathfrak{N}(D_{N(\eta)}^{N(\vartheta)}),$$

wobei $\mathfrak{N}(D_{N(\eta)}^{N(\vartheta)})$ die Norm der Relativdiskriminante von $N(\vartheta)\mid N(\eta)$ bezeichnet. Daraus und aus (II) ergibt sich:

$$\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)}=\Delta_{N(\eta)}^{\varkappa}\sqrt[p-1]{\mathfrak{N}^{\varkappa}(D_{N(\eta)}^{N(\vartheta)})}.$$

§ 5. Anwendungen von (II).

A. Aus (II) könnte man auch sofort die Primidealzerlegung in $\mathsf{P}(\vartheta)$ erschließen, falls ϑ der Gleichung

$$x^p-a=0$$

genügt. Es sind für $\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)}$ folgende Fälle möglich:

1. $\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)}=p^{p-2}\,(p_1\,p_2\cdots p_n)^{p-1}\qquad(p_\nu\neq p)$
2. $\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)}=p^{p}\,(p_1\,p_2\cdots p_n)^{p-1}\qquad(p_\nu\neq p)$
3. $\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)}=p^{p}\,(p\,p_1\cdots p_n)^{p-1}\qquad(p_\nu\neq p);$

eine andere Möglichkeit ist ausgeschlossen. $N(\vartheta)$ ist dann vom Grade $p(p-1)$ und $N(\eta)=\mathsf{P}(\varepsilon)$. Da

$$\Delta_{N(\eta)}=p^{p-2}$$

ist, so wird

(III) $$\Delta_{N(\vartheta)}=p^{p-2}\,\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)}^{p-1}.$$

Weiter wird aber der Exponent einer Primzahl, die in $\Delta_{N(\vartheta)}$ aufgeht, bestimmt durch

$$E=m_t[r_t-r_v+L(r_v-r_{\bar v})+\cdots],$$

wobei m_t der Index der Trägheitsgruppe in $N(\vartheta)$ ist, wobei also m_t einen Teiler von $p(p-1)$ bedeutet. Es ist

$$r_t\,m_t=p(p-1).$$

(Über die übrigen Bezeichnungen siehe Zahlbericht, S. 260.)

Es sei nun

1. $$\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)}=p^{p-2}(p_1\,p_2\cdots p_n)^{p-1},$$

dann wird $E=E_\nu$ für p_ν mit

$$E_\nu=(p-1)^2,\quad\text{d. h.}\quad m_t\not\equiv 0\pmod p,$$

also $$r_t=p\,b,\qquad\text{d. h. aber}\qquad(p_\nu)=\mathfrak{q}^p\ \text{ in }\ \mathsf{P}(\vartheta),$$

da $N(\vartheta) \mid \mathsf{P}(\vartheta)$ vom Relativgrad $p-1$ ist, somit bei der Primidealzerlegung nicht der Exponent p erzeugt werden kann. Für p wird

$$E = p - 2 + (p-1)(p-2) = p\,(p-2), \qquad \text{d. h.} \quad m_t = 1 \quad \text{oder} \quad = p.$$

Wäre $m_t = 1$, so müßte $r_t = p\,(p-1)$ sein, und p hätte in $\mathsf{P}(\vartheta)$, wie oben geschlossen, die Zerlegung

$$(p) = \mathfrak{q}^p,$$

müßte also mindestens zur Potenz p in $\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)}$ aufgehen.

Also ist

$$m_t = p \quad \text{und} \quad r_t = p - 1.$$

(p) hätte in $N(\vartheta)$ die Zerlegung

$$(p) = (\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_p)^{p-1} \qquad \text{oder} \qquad (p) = (\mathfrak{P}_1')^{p-1},$$

wobei $\mathfrak{P}_1, \mathfrak{P}_2, \ldots, \mathfrak{P}_p$ den Grad 1 hätten und $\mathfrak{P}_1'$ den Grad p. Wäre

$$(p) = (\mathfrak{P}_1')^{p-1},$$

so müßte (p) in $\mathsf{P}(\vartheta)$ ein Primideal p-ten Grades sein, also nicht in der Diskriminante von $\mathsf{P}(\vartheta)$ aufgehen, was nicht geht. Ein Primideal p-ten Grades müßte es sein, weil der Relativgrad von $N(\vartheta) \mid \mathsf{P}(\vartheta)$ gleich $p-1$ ist und somit keinen Relativgrad p bei einem Primideal erzeugen kann. Also ist

$$(p) = (\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_p)^{p-1}.$$

Dann muß aber (p) in $\mathsf{P}(\vartheta)$ als Unterkörper von $N(\vartheta)$ ebenfalls in Primideale 1-ten Grades zerfallen. Es sei also

$$(p) = \mathfrak{q}_1^{a_1}\,\mathfrak{q}_2^{a_2} \cdots \mathfrak{q}_m^{a_m} \text{ in } \mathsf{P}(\vartheta)$$

und jedes $\mathfrak{q}_\nu$ vom Grade 1. Da $a_\nu < p$ ist, so ist p keine singuläre Primzahl, und es wird daher

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_m = p$$

und

$$a_1 - 1 + a_2 - 1 + \cdots + a_m - 1 = p - 2, \quad \text{d. h.} \quad m = 2.$$

Also

$$(p) = \mathfrak{q}_1^{a_1}\,\mathfrak{q}_2^{a_2}.$$

Da aber a_1 und a_2 wegen der Zerlegung in $N(\vartheta)$ Teiler von $p-1$ sein müssen, und

$$a_1 + a_2 = p$$

ist, so kann nur

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_2 = p - 1$$

sein. Wir erhalten demnach

$$p = \bar{\mathfrak{q}}_1\,\mathfrak{q}_1^{p-1} \text{ in } \mathsf{P}(\vartheta),$$

was wir auch vorhin abgeleitet hatten.

Jetzt sei

2. $$\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)} = p^p\,(p_1\,p_2 \cdots p_n)^{p-1}.$$

Wie eben erschließt man

$$(p_\nu) = \mathfrak{q}_\nu^{p-1} \text{ in } \mathsf{P}(\vartheta).$$

Für p ist

$$E = p - 2 + p\,(p-1) \text{ nach (III)}.$$

Also

$$E = p^2 - 2.$$

Da aber

$$(p,\, p^2-2) = 1 \quad \text{und} \quad (p-1,\, p^2-2) = 1$$

ist, so wird

$$m_t = 1, \quad \text{d. h.} \quad r_t = p\,(p-1),$$

und p hat wie bei p_ν die Zerlegung

$$(p) = \mathfrak{q}^p \text{ in } \mathsf{P}(\vartheta).$$

Schließlich sei

3. $$\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)} = p^p\,(p\,p_1 \cdots p_n)^{p-1}.$$

Dann wird

$$E = p - 2 + (p-1)\,(2\,p-1),$$

also nach (III)

$$E = 2\,p^2 - 2\,p - 1.$$

Es ist aber auch

$$(2\,p^2 - 2\,p - 1,\, p) = 1 \text{ und } (2\,p^2 - 2\,p - 1,\, p-1) = 1;$$

also ist auch hier

$$m_t = 1 \text{ und } r_t = p(p-1),$$

und wir erhalten in $\mathsf{P}(\vartheta)$ die Zerlegung

$$(p) = \mathfrak{q}^p.$$

Alles stimmt mit dem in § 1 und § 2 Abgeleiteten überein.

B. Ist $\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)}$ genau durch q^{p-1} teilbar, so zerfällt q in $\mathsf{P}(\vartheta)$ in der Form

$$(q) = \mathfrak{q}^p.$$

Beweis: Es sei

$$(q) = (\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_a)^b \text{ in } N(\eta),$$

dann ist $\Delta_{N(\eta)}$ durch $q^{af(b-1+\varrho)}$ genau teilbar, wobei ϱ die zugehörige Supplementzahl ist. Angenommen, $\mathfrak{p}_\nu$ geht nicht in der Relativdiskriminante von $N(\vartheta) \mid N(\eta)$ auf, so wird

$$(q) = (\mathfrak{P}_1 \cdots \mathfrak{P}_a)^b \text{ in } N(\vartheta),$$

und q geht in $\Delta_{N(\vartheta)}$ genau zur Potenz $paf(b-1+\varrho)$ auf, weil die Beziehung besteht:

$$\Delta_{N(\vartheta)} = \Delta_{N(\eta)}^p\, N(D_{N(\eta)}^{N(\vartheta)}),$$

wobei $D_{N(\eta)}^{N(\vartheta)}$ die Relativdiskriminante bedeutet und $\mathfrak{N}(D_{N(\eta)}^{N(\vartheta)})$ die zugehörige Norm in $N(\eta)$ bezeichnet. Aus (II) folgt dann:

$$(p-1)\,\frac{p-1}{\varkappa} + af\,(b-1+\varrho) = p\,af\,(b-1+\varrho),$$

d. h.

$$\frac{(p-1)^2}{\varkappa} = (p-1)\,af\,(b-1+\varrho),$$

$$\frac{(p-1)}{\varkappa} = \frac{p-1}{\varkappa b}\,(b-1+\varrho),$$

also

$$\varrho = 1.$$

Weiter ist aber der Exponent, mit dem q in $\Delta_{N(\vartheta)}$ aufgeht, durch die Formel

$$E = m_t\,[r_t - r_v + L\,(r_v - r_{\bar v}) + \bar L\,(r_{\bar v} - r_{\bar{\bar v}}) + \cdots]$$

bestimmt, wobei

$$\cdots \bar{\bar L} \geqq \bar L \geqq L \geqq 2$$

ist. Bei uns ist

$$r_t = b = \frac{p-1}{af\,\varkappa} \text{ und } m_t = \frac{p(p-1)}{\varkappa r_t} = \frac{p(p-1)}{\varkappa b};$$

$$r_v = q^e, \quad r_{\bar v} = q^{\bar e}, \ldots$$

Andererseits war

$$E = p\,af\,(b-1+\varrho) = \frac{p(p-1)}{\varkappa}$$

gefunden worden, da $\varrho = 1$ war. D. h.

$$\frac{p(p-1)}{\varkappa} = \frac{p(p-1)}{\varkappa} - \frac{p(p-1)\,q^l}{\varkappa b} + \frac{p(p-1)}{\varkappa b} L(q^l - q^{\bar{l}}) + \cdots.$$

Also

$$\frac{p(p-1)}{\varkappa b} q^l = \frac{p(p-1)}{\varkappa b} L(q^l - q^{\bar{l}}) + \cdots,$$

$$q^l = L\,q^l + q^{\bar{l}}\,(\bar{L} - L) + q^{\bar{\bar{l}}}\,(\bar{\bar{L}} - \bar{L}),$$

d. h. aber

$$L = 1,$$

was unmöglich ist. Also muß $\mathfrak{p}_\nu \mid D_{N(\eta)}^{N(\vartheta)}$ und (q) in $N(\vartheta)$ zerfallen nach dem Gesetz:

$$(q) = (\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_a)^{p)}$$

und, wie wir schon häufig geschlossen haben, eine Zerlegung $(q) = \mathfrak{q}^p$ in $\mathsf{P}(\vartheta)$ haben, w. z. b. w. Es sei hier noch ein für das Spätere wichtiger Satz genannt:

C. *Geht die Primzahl p zur Potenz p in $\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)}$ auf, so ist $N(\vartheta)$ vom Grade $p(p-1)$.*

Beweis: Wenn $p^p \mid \Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)}$, so erkennt man wie oben, daß

$$(p) = \mathfrak{q}^p$$

sein muß, daß also die Relativdiskriminante von $N(\vartheta) \mid N(\eta)$ durch $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_a$ teilbar sein muß, wenn

$$(p) = (\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_a)^b \quad \text{in} \quad \mathsf{P}(\eta)$$

ist. Nach einem bekannten Satze über relativzyklische Körper von Primzahlgrad ist $D_{\mathsf{P}(\eta)}^{N(\eta)}$, die Relativdiskriminante, genau durch $(\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_a)^{(p-1)(v-1)}$ teilbar, wobei $1 \leqq v \leqq \frac{b\,p}{p-1}$ ist und nur dann $v = \frac{b\,p}{p-1}$, falls v durch p teilbar ist.

Es wird demnach

$$\mathfrak{N}(D_{N(\eta)}^{N(\vartheta)}) = p^{\frac{(p-1)^2}{\varkappa b}\cdot(v+1)}.$$

Weil nun

$$\Delta_{N(\vartheta)} = \Delta_{N(\eta)}^p\,\mathfrak{N}(D_{N(\eta)}^{N(\vartheta)})$$

gilt und $\Delta_{N(\eta)}$ durch $q^{af(b-1)}$ genau teilbar ist (die Supplementzahl ist $= 0$, da stets $b < p$ ist), so wird $\Delta_{N(\vartheta)}$ teilbar durch p^E, wobei

$$E = \frac{(v+1)(p-1)^2}{\varkappa b} + p\,af(b-1) \text{ ist.}$$

Andererseits ist nach (II)

$$E = p\,\frac{p-1}{\varkappa} + af(b-1).$$

D. h.

$$p\,af(b-1) + \frac{(v+1)\,(p-1)^2}{\varkappa b} = p\,\frac{(p-1)}{\varkappa} + af(b-1),$$

$$(p-1)\,af(b-1) + \frac{(v+1)\,(p-1)^2}{\varkappa b} = p\,\frac{(p-1)}{\varkappa},$$

d. h. $\frac{b}{p-1}$ ist ganzzahlig, also $b = p-1$ und $v = 1$. Demnach wird also $N(\eta)$ vom Grade $\geqq p-1$. Andererseits war aber der Grad $\leqq p-1$, also ist $N(\eta)$ vom Grade $p-1$. Hieraus folgt die Behauptung.

Und schließlich noch der weitere Satz:

D. *Ist p in $\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)}$ zu höherer als der $(p-1)$-ten Potenz enthalten, so kann nur p^p oder p^{2p-1} in $\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)}$ enthalten sein. Es ist dann $(p) = \mathfrak{p}^p$ in $\mathsf{P}(\vartheta)$, und $N(\vartheta)$ ist vom Grade $p(p-1)$. Die Supplementzahlen erreichen demnach ihre Grenzen.*

Beweis: Nach dem vorherigen Satz ist

$$(p) = \mathfrak{p}^p \text{ in } \mathsf{P}(\vartheta).$$

In $N(\vartheta)$ wird $(p) = (\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_2 \cdots \mathfrak{P}_{mt})^{r_t}$, wobei $r_t = \frac{p(p-1)}{b}$ ist mit $b \mid p-1$. Die Trägheitsgruppe $\mathfrak{T}$ von einem Primideal $\mathfrak{P}_\nu$ (schlechthin $\mathfrak{P}$ genannt) ist dann $\{S, T^a\}$, wobei $\frac{p-1}{\varkappa} = ab$ ist. Die Verzweigungsgruppe ist $\mathfrak{V} = \{S\}$.

π sei eine durch $\mathfrak{P}$ aber nicht durch $\mathfrak{P}^2$ teilbare Zahl und $\alpha = T^a\pi$. Es sei dann $S\alpha = \alpha + \beta_L$, wobei β_L durch $\mathfrak{P}^L$ teilbar ist und im allgemeinen durch keine höhere Potenz von $\mathfrak{P}$. Da $T^{p-1} = E$ ist, so folgt, daß in der Kongruenz $\pi \equiv \tau\alpha \pmod{\mathfrak{P}^2}$ die dem Trägheitskörper angehörige Zahl τ in der Form $g^{-\alpha}$ dargestellt werden kann, wobei g eine primitive Wurzel mod p ist. Dann ist aber $T^{-a}\,S\,T^a\alpha \equiv \alpha + g^{(L-1)a}\,\beta_L \pmod{\mathfrak{P}^{L-1}}$. Nun kann $T^{-a}\,S\,T^a$ auch in der Form S^{g^a} dargestellt werden mit derselben Primitivwurzel g. Somit muß $g^a \equiv g^{(L-1)a} \pmod p$ sein, d. h.

$$L - 1 \equiv 1 \pmod b.$$

Andererseits ist

$$L - 1 \leqq \frac{bp}{p-1} = b + \frac{b}{p-1},$$

d. h. $L-1 = 1$ oder $= p$; letzteres kann nur der Fall sein, falls $b = p-1$ ist, d. h. $\varkappa = a = 1$ wird. Aus der Hilbertschen Formel zur Berechnung des Exponenten, mit dem p in der Diskriminante des Galoisschen Körpers aufgeht, und aus unserer Diskriminanten-Relation (II) folgt die Behauptung.

§ 6. Der Hauptsatz.

Um den Hauptsatz beweisen zu können, müssen wir noch einige Tatsachen aus der Theorie der relativzyklischen Körper herleiten.

I. Es sei $\mathsf{P}(\vartheta)$ ein auflösbarer Körper von Primzahlgrad p und

$$\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)} = p^m\,(p_1\,p_2 \cdots p_n)^{p-1},\ (p_\nu \neq p_\mu),\ (p_\nu \neq p),$$

wobei a) $m = p-2$,
b) $m = p$,
oder c) $m = 2p-1$ sein kann.

Dann behaupten wir: *Ist p_ν ein Primitivwurzel mod p, so ist $\Delta_{N(\eta)}$*, wobei $N(\eta)$ der früher eingeführte Körper ist, *durch keine andere Primzahl als p teilbar, und $N(\eta)$ hat den Grad $p-1$.*

Beweis: Nach § 5, 2. hat p_ν die Zerlegung

$$(p_\nu) = \mathfrak{q}^p$$

in $\mathsf{P}(\vartheta)$. Sei

$$(p_\nu) = (\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_a)^b$$

in $N(\eta)$, so muß nach § 3 oder § 4, S. 183, $\mathfrak{p}_\nu$ in der Relativdiskriminante von $N(\vartheta) \mid N(\eta)$ aufgehen. $N(\vartheta) \mid N(\eta)$ ist relativzyklisch vom Primzahlgrad p. In der Relativdiskriminante gehen aber nur solche Primzahlen auf, deren Norm in $N(\eta)$ kongruent 1 (mod p) ist. Nun ist $\mathfrak{N}(\mathfrak{p}_\nu) = p_\nu^f = (p\,x_\nu + g_\nu)^f \equiv g_\nu^f \pmod p$. Soll nun $g_\nu^f \equiv 1 \pmod p$ gelten, so muß $f = p-1$ sein. Somit finden wir:

1. Der Grad von $N(\eta)$ ist gleich $p-1$. (Der Grad 1 für $N(\eta)$ ist ausgeschlossen, da sonst $N(\vartheta)$ vom Grade p und $\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)}$ ein vollständiges Quadrat sein müßte, was nicht der Fall ist.)

2. $b = 1$. Also gehen die Zahlen $p_1, p_2, \ldots, p_n$ nicht in $\Delta_{N(\eta)}$ auf. Da aber

$\Delta_{N(\eta)}$ nur Primzahlen enthält, die auch in $\Delta_{N(\vartheta)}$ aufgehen, und diese wiederum dieselben sind wie die aus $\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)}$, so enthält $\Delta_{N(\eta)}$ nur eine Potenz von p. Damit ist der Satz bewiesen.

In $\mathsf{P}(\eta)$ hat dann aber p stets die Zerlegung

$$(p) = \mathfrak{p}^{p-1}.$$

Im Falle a) ist dies klar. Denn sei

$$(p) = \bar{\mathfrak{p}}_1 (\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_e)^b,$$

so ist, da $b < p$ ist, p nicht singulär, und es müßte

$$e f (b-1) = p - 2$$

sein, wobei

$$e f b = p - 1$$

ist, d. h.

$$f = e = 1, \qquad b = p - 1.$$

Somit erhält (p) in $\mathsf{P}(\vartheta)$ die Zerlegung

$$(p) = \bar{\mathfrak{p}}_1 \mathfrak{p}_1^{p-1}.$$

Nach § 1 (Ende) folgt aber

$$(p) = \mathfrak{q}_1^{p-1} \text{ in } N(\eta).$$

Im Falle b) und c) folgt dieselbe Tatsache zum Beispiel nach § 4. Wir werden sie aber gleich aus einem viel allgemeineren Satz sofort erkennen.

$N(\eta)$ ist offenbar in diesem Fall ein zyklischer Körper vom Grade $p-1$, der in der Diskriminante nur die Primzahl p enthält. Wir beweisen nun den wichtigen Satz:

II. *Es sei* $\mathsf{P}(\eta)$ *ein zyklischer Körper vom Grade* $p-1$, *wo* p *eine Primzahl ist. In der Körperdiskriminante gehe nur die Primzahl* p *auf. Dann ist* $\mathsf{P}(\eta) = \mathsf{P}(\varepsilon)$, *wobei* ε *eine* p*-te Einheitswurzel bedeutet.*

Beweis: Es sei

$$p - 1 = \bar{p}_1^{a_1} \bar{p}_2^{a_2} \cdots \bar{p}_e^{a_e}.$$

Dann ist

$$\mathsf{P}(\eta) = \mathsf{P}_1(\varrho_1)\, \mathsf{P}_2(\varrho_2) \cdots \mathsf{P}_e(\varrho_e),$$

wobei $\mathsf{P}_\nu(\varrho_\nu)$ ein zyklischer Körper vom Primzahlgrad $\bar{p}_\nu^{a_\nu}$ ist. Jedes $\mathsf{P}_\nu(\varrho_\nu)$ kann in seiner Körperdiskriminante nur die Primzahl p enthalten. Es ist dann $\bar{p}_\nu < p$, und wir können [1]) zu jedem $\mathsf{P}_\nu(\varrho_\nu)$ einen Abelschen Körper $C'_{\alpha'_\nu}$ von einem gewissen Grade

$$\bar{p}_\nu^{\alpha'_\nu} \leqq \bar{p}_\nu^{\alpha_\nu}$$

mit den folgenden Eigenschaften angeben:

1. Der aus $C'_{\alpha'_\nu}$ und einem Kreiskörper $\mathsf{P}_{\alpha_\nu}(\varrho)$ zusammengesetzte Körper enthält $\mathsf{P}_\nu(\varrho_\nu)$ als Unterkörper. Dabei ist $\mathsf{P}_{\alpha_\nu}(\varrho_\nu)$ der zyklische Unterkörper $\bar{p}_\nu^{\alpha_\nu}$-ten Grades des Körpers $\mathsf{P}(e^{\frac{2\pi i}{p}}) = P(\varepsilon)$.

2. Die Diskriminante des Körpers $C'_{\alpha'_\nu}$ enthält nur solche Primzahlen, die auch in der Diskriminante der Körper $\mathsf{P}_\nu(\varrho_\nu)$ aufgehen, darunter aber nicht die Primzahl p. Nach der letzten Eigenschaft ist aber $C'_{\alpha_\nu} = \mathsf{P}(1)$, da in $\Delta_{\mathsf{P}_\nu(\varrho_\nu)}$ nur p aufgeht und es keinen Körper außer $\mathsf{P}(1)$ gibt, dessen Körperdiskriminante $= \pm 1$ ist. Also ist

$$\mathsf{P}_\nu(\varrho_\nu) = \mathsf{P}_{\alpha_\nu}(\varrho_\nu)$$

nach der Eigenschaft 1. Somit wird

$$\prod_{\nu=1}^{l} \mathsf{P}_\nu(\varrho_\nu) = \prod_{\nu=1}^{l} \mathsf{P}_{\alpha_\nu}(\varrho_\nu).$$

Weiter bilden aber die $\mathsf{P}_{\alpha_\nu}(\varrho_\nu)$ den Körper $\mathsf{P}(\varepsilon)$; es ist bekanntlich

[1]) Siehe Zahlbericht, S. 345.

$$\prod_{\nu=1}^{l} \mathsf{P}_{\alpha_\nu}(\varrho_\nu) = \mathsf{P}(\varepsilon).$$

Demnach wird $\mathsf{P}(\eta) = \mathsf{P}(\varepsilon)$, und unser Satz ist bewiesen. Nebenbei gilt für p dann die Zerlegung

$$(p) = \mathfrak{p}^{p-1},$$

gerade das, was wir am Schluß der vorigen Nummer behauptet hatten.

III. Hauptsatz.

Hat ein auflösbarer Körper $\mathsf{P}(\vartheta)$ *vom Primzahlgrad* p *eine der (bei einem binomischen Körper überhaupt nur möglichen) Diskriminanten:*

1. $\quad \Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)} = p^{p-2}(p_1 p_2 \cdots p_n)^{p-1} \qquad (p_\nu \neq p)$
2. $\quad \Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)} = p^{p}(p_1 p_2 \cdots p_n)^{p-1} \qquad (p_\nu \neq p)$
3. $\quad \Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)} = p^{p}(p\, p_1 p_2 \cdots p_n)^{p-1} \qquad (p_\nu \neq p)$

und sind die p_ν *von der Form*

$$px_\nu + g_\nu,$$

wobei die g_ν *nicht notwendigerweise voneinander verschiedene Primitivwurzeln mod* p *sind, so wird in der Tat* $\mathsf{P}(\vartheta)$ *durch eine binomische Gleichung*

$$x^p - a = 0$$

erzeugt, wobei im Fall 1. *und* 2.

$$a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_n^{\alpha_n}, \ \alpha_\nu \not\equiv 0 \pmod p$$

und im Fall 3.

$$a = p^{\alpha} p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}, \quad \textit{mit} \ \alpha_\nu \equiv 0 \pmod p \ \textit{ist.}$$

Beweis: Nach § 5, A ist

$$N(\vartheta) = \mathsf{P}(\vartheta)\, P(\varepsilon),$$

wobei ε eine p-te Einheitswurzel ist. $N(\vartheta)$ ist offenbar wegen der Auflösbarkeit ein Kummerscher Körper, d. h.

$$N(\vartheta) = \mathsf{P}(\varepsilon \sqrt[p]{\mu}), \quad \text{wobei } \mu \ \text{ in } \ \mathsf{P}(\varepsilon).$$

Es sei

$$(p_\nu) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_a \ \text{ in } \ \mathsf{P}(\varepsilon).$$

Da

$$p_\nu^{p-1} \equiv 1 \pmod p$$

die niedrigste Potenz von p ist, die $\equiv 1 \pmod p$ wird, muß $(p_\nu) = \mathfrak{p}_\nu'$ ein Primideal $(p-1)$-ten Grades sein. Diese muß in der Relativdiskriminante von $N(\vartheta) \mid \mathsf{P}(\varepsilon)$ aufgehen, da sonst $\Delta_{N(\vartheta)}$ nicht p_ν enthielte, was aber der Fall sein muß, da $\Delta_{N(\vartheta)}$ alle und nur die Primzahlen enthält, die in $\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)}$ aufgehen. In der Relativdiskriminante des relativzyklischen Körpers $N(\vartheta) \mid \mathsf{P}(\varepsilon)$ vom Primzahlgrad geht aber das Primideal $\mathfrak{p}_\nu$ zur $(p-1)$-ten Potenz auf. Dann geht aber $\mathfrak{p}_\nu'$ in (μ) mit dem Exponenten e_ν auf, der relativ prim zu p ist. Das gilt für jedes ν aus der Reihe 1, 2, . . ., n. Etwas komplizierter ist die Betrachtung des Primideals (p), für das

$$(p) = \mathfrak{p}^{p-1} \ \text{in} \ P(\varepsilon)$$

ist. Ist

$$\Delta = p^{p-2}\,(p_1 p_2 \cdots p_n)^{p-1},$$

so ist die Relativdiskriminante gar nicht durch p teilbar, da

$$(p) = \mathfrak{q}_1\, \mathfrak{q}_1'^{p-1} \ \text{in} \ \mathsf{P}(\vartheta)$$

wird, während $(p) = \mathfrak{q}^p$ sein müßte.

Demnach kann man auch die Zahl μ so wählen, daß sie nicht durch eine Potenz von p teilbar ist, denn es käme nur eine Potenz in Frage, die $\equiv 0 \pmod p$ ist, und eine solche könnte aus $\sqrt[p]{\mu}$ fortgebracht werden. Es wird also

$$(\mu) = \mathfrak{p}_1^{e_1}\,\mathfrak{p}_2^{e_2}\cdots\mathfrak{p}_n^{e_n},$$

$$\text{also} \qquad \mu = p_1^{e_1}\,p_2^{e_2}\cdots p_n^{e_n}\cdot\lambda,$$

wobei λ eine Einheit in $\mathsf{P}(\varepsilon)$ ist.

Im zweiten Fall

$$\Delta = p^p(p_1\,p_2\cdots p_n)^{p-1}$$

können wir die Potenz von $\mathfrak{p}$ berechnen, mit welcher $\mathfrak{p}$ in der Relativdiskriminante von $N(\vartheta)\,|\,\mathsf{P}(\varepsilon)$ aufgeht, denn einmal ist

$$\Delta_{N(\vartheta)} = \Delta_{\mathsf{P}(\varepsilon)}^{p}\,\mathfrak{N}(D_{\mathsf{P}(\varepsilon)}^{N(\vartheta)}),$$

wobei $\mathfrak{N}$ die Norm der Relativdiskriminante $D_{\mathsf{P}(\varepsilon)}^{N(\vartheta)}$ in $\mathsf{P}(\varepsilon)$ bezeichnet. Andererseits ist aber nach (II):

$$\Delta_{N(\vartheta)} = \Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)}^{p}\,\Delta_{\mathsf{P}(\varepsilon)}.$$

Wenn $D_{\mathsf{P}(\varepsilon)}^{N(\vartheta)}$ genau durch p^x teilbar ist, so erhält man

$$p(p-2)+x = p(p-1)+p-2, \quad \text{d. h.} \quad x = 2p-2.$$

Dann ist aber μ nicht durch p teilbar, da

$$2p-2 = p^2-1$$

sein müßte.

Also ist auch in diesem Falle

$$\mu = p_1^{e_1}\,p_2^{e_2}\cdots p_n^{e_n}\cdot\lambda.$$

Ist schließlich

$$\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)} = p^p(p\,p_1\cdots p_n)^{p-1},$$

so kann wieder die Potenz von $\mathfrak{p}$ berechnet werden, die in $D_{\mathsf{P}(\varepsilon)}^{N(\vartheta)}$ aufgeht. Die obige Gleichung für x wird in diesem Falle

$$x + p(p-2) = p-2+(p-1)(2p-1), \quad \text{d. h.} \quad x = p^2-1,$$

und μ ist durch eine Potenz von p teilbar, deren Exponent zu p prim ist. D. h.

$$(\mu) = \mathfrak{p}_1^{e_1}\,\mathfrak{p}_2^{e_2}\cdots\mathfrak{p}_n^{e_n}\cdot\mathfrak{p}^{e},$$

$$\text{also} \quad \mu = p_1^{e_1}\,p_2^{e_2}\cdots p_n^{e_n}\,(1-\varepsilon)^{e}\cdot\lambda, \qquad \lambda = \text{Einheit in } \mathsf{P}(\varepsilon).$$

Da aber $\mathsf{P}(\varepsilon, \sqrt[p]{\mu})$ ein Galoisscher Körper ist, so muß $\dfrac{S(\mu)}{\mu^{\varkappa}} = \alpha^p$ sein, wobei $1 \leqq \varkappa \leqq p-1$ ist und α eine Zahl aus $\mathsf{P}(\varepsilon)$ darstellt. $S(\mu)$ ist aber die Zahl, die aus μ hervorgeht durch die Substitution

$$S = (\varepsilon : \varepsilon^{g}),$$

wobei g eine primitive Wurzel mod p ist. Wegen

$$e_1, e_2, \ldots, e_n \not\equiv 0 \pmod p$$

muß offenbar $\varkappa = 1$ sein und also

$$\frac{(1-\varepsilon^{g})^{e}}{(1-\varepsilon)^{e}}\cdot\frac{S(\lambda)}{\lambda} = \alpha^p.$$

$S(\lambda)$, λ^{-1} und $\dfrac{1-\varepsilon^{g}}{1-\varepsilon}$ sind Einheiten, also ist auch α eine Einheit in $\mathsf{P}(\varepsilon)$. Demnach ist

$$(1-\varepsilon)^{e}\,\lambda = E_1 S(\lambda(1-\varepsilon)^{e})$$

und weiter durch wiederholtes Anwenden von S:

$$(1-\varepsilon)^e\,\lambda = E_1^p S\,(\lambda(1-\varepsilon)^e)$$
$$(1-\varepsilon)^e\,\lambda = E_2^p S^2(\lambda(1-\varepsilon)^e)$$
$$(1-\varepsilon)^e\,\lambda = E_3^p S^3(\lambda(1-\varepsilon)^e)$$
$$\vdots$$
$$(1-\varepsilon)^e\,\lambda = E_{p-2}^p S^{p-2}(\lambda(1-\varepsilon)^e),$$

wobei E_ν Einheiten in $\mathsf{P}(\varepsilon)$ sind. Also

$$((1-\varepsilon)^e\,\lambda)^{p-1} = (E_1\,E_2\cdots E_{p-2})^p \cdot \mathfrak{N}(\lambda(1-\varepsilon)^e),$$

wobei $\mathfrak{N}(\lambda(1-\varepsilon)^e)$ die Norm von $\lambda(1-\varepsilon)^e$ bezeichnet.

Es ist aber

$$\mathfrak{N}(\lambda(1-\varepsilon)^e) = \pm p^e.$$

$E_1\,E_2\,E_3\cdots E_{p-2} = E$ ist eine Einheit in $\mathsf{P}(\varepsilon)$. Aus

$$((1-\varepsilon)^e\,\lambda)^{p-1} = \pm p^p \cdot p^e$$

folgt

$$(1-\varepsilon)^{(p-1)e}\,\lambda^{p-1} = \pm E^p\,p^e,$$

und da

$$p = (1-\varepsilon)^{p-1}\,\varepsilon_2\,\varepsilon_3\cdots\varepsilon_{p-1} \text{ ist, wobei } \varepsilon_\nu \text{ die Einheit}$$
$$\varepsilon_\nu = \frac{1-\varepsilon^\nu}{1-\varepsilon}$$

bezeichnet, so wird

$$\lambda^{p-1} = \pm E^p(\varepsilon_2\,\varepsilon_3\cdots\varepsilon_{p-1})^e.$$

D. h. aber: Es darf

$$e \equiv 0 \pmod{(p-1)}$$

angenommen werden. Demnach wird in diesem Falle auch

$$\mu = p^{e'}\,p_1^{e_1}\,p_2^{e_2}\cdots p_n^{e_n}\,\lambda,$$

wobei λ eine Einheit in $\mathsf{P}(\varepsilon)$ ist.

Für alle drei Fälle muß nun

$$\frac{S(\mu)}{\mu^\varkappa} = \alpha^p$$

sein; wie eben schließen wir $\varkappa = 1$. Fassen wir die bei μ auftretenden Primzahlpotenzen p_ν bzw. p zusammen zu r, so muß

$$\frac{r\,S(\lambda)}{r\,\lambda} = \alpha^p$$

sein. D. h. $\lambda = S(\lambda)\,E_1^p,$

und daraus folgt wie eben

$$\lambda^{p-1} = \mathfrak{N}(\lambda)\,E^p.$$

D. h., da $\mathfrak{N}(\lambda) = \pm 1$ ist,

$$\sqrt[p]{\lambda} = \text{Einheit in } \mathsf{P}(\varepsilon).$$

Eine p-te Potenz einer Zahl aus $\mathsf{P}(\varepsilon)$ können wir aber bei μ fortlassen. Demnach kann $\mu = r$ angenommen werden, und $N(\vartheta)$ setzt sich zusammen aus $\mathsf{P}(\varepsilon)$ und $\mathsf{P}(\sqrt[p]{r})$. $\mathsf{P}(\sqrt[p]{r})$ wird aber erzeugt durch die Gleichung

$$x^p - r = 0,$$

$$\text{wobei} \quad r = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n} \quad \text{ist} \quad (e_\nu \not\equiv 0 \pmod p)$$
$$\text{oder} \quad r = p^e \, p_1^{e_1} \cdots p_n^{e_n} \qquad (e, e_\nu \equiv 0 \pmod p).$$

Der letzte Fall tritt nur dann ein, wenn

$$\Delta_{\mathsf{P}(\vartheta)} = p^{p-1}(p \cdot p_1 \cdots p_n)^{p-1} \quad \text{ist.}$$

Aus der Form von r folgt auch, daß $x^p - r = 0$ irreduzibel in $\mathsf{P}(1)$ ist, und unser Hauptsatz ist bewiesen.

Eingegangen 3. Januar 1932.

Über die Verteilung von Lücken- und Primzahlen.

Von *Robert Haußner* in Jena.

In meiner Mitteilung zu dem Hensel-Festbande (dieses Journal **167**, S. 42) hatte ich die Vermutung ausgesprochen, daß zwischen zwei aufeinander folgenden ganzzahligen Vielfachen der Primzahl $p_r (p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, \ldots, p_{r-1}, p_r)$ mindestens eine Lückenzahl r-ter Stufe liege.

Herr Alfred Brauer hatte die Freundlichkeit, mich darauf aufmerksam zu machen, daß diese Vermutung in der ausgesprochenen Allgemeinheit nicht gültig sei; als Beleg dafür teilte er mir mit, daß zwischen den Zahlen $168 \cdot 13 = 2184$ und $169 \cdot 13 = 2197$ keine Lückenzahl 6-ter Stufe liegt. Sämtliche dazwischenliegenden Zahlen sind durch mindestens eine der ersten fünf Primzahlen teilbar [1]). Infolgedessen können auch zwischen $30030 - 2197 = 13 \cdot 2141$ und $30030 - 2184 = 13 \cdot 2142$ keine Lückenzahlen 6-ter Stufe liegen.

Ob der aus der obigen Vermutung über Lückenzahlen gefolgerte Satz über Primzahlen, daß zwischen je zwei aufeinander folgenden ganzzahligen Vielfachen einer Primzahl p_r, die beide kleiner als p_{r+1}^2 sind, mindestens eine Primzahl liegt, allgemein gültig ist, bedarf der weiteren Untersuchung. Ich habe diese Vermutung für alle Primzahlen kleiner als 100 rechnerisch prüfen lassen, wobei sie sich für dieselben bestätigt fand.

[1]) Meinem Rechner war leider hinsichtlich der Lückenzahlen 6-ter Stufe, die er nur bis 15015 berechnet hatte, ein Irrtum unterlaufen.

Jena, im März 1932.

Eingegangen 15. März 1932.